

АЛГЕБРА

9

ТЕТРАДЬ-ТРЕНАЖЁР

КЛАСС

УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

π

$$\frac{1}{x^2 + 1} \geq 0$$



Д.А. Куделина, Е.А. Куделина

АЛГЕБРА

9 класс

УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВЕНЬ

ТЕТРАДЬ-ТРЕНАЖЁР

Электронное издание



Москва

Издательство «Интеллект-Центр»

2026

УДК 373.167.1:51+51(075.3)

ББК 22.1я721

К88

Рецензенты:

Е. В. Лукьянова – кандидат педагогических наук,
доцент кафедры математического анализа им. П.С. Новикова ИМИИ МПГУ,
учитель высшей категории;

Т. Н. Казарихина – кандидат педагогических наук, учитель математики
и информатики высшей квалификационной категории,
заместитель директора АНО СОШ «Димитриевская», доцент МПГУ

Куделина, Д. А.

К88 Алгебра. 9 класс. Углублённый уровень. Тетрадь-тренажёр : учебное пособие / Д. А. Куделина, Е. А. Куделина. — Эл. изд. — 1 файл pdf : 99 с. — Москва : Издательство «Интеллект-Центр», 2026. — Систем. требования: Adobe Reader XI либо Adobe Digital Editions 4.5 ; экран 10". — Текст : электронный.

ISBN 978-5-908080-22-4

Тетрадь-тренажёр — это уникальное пособие, способствующее систематическому углублению изучаемого материала и развитию навыков решения сложных задач, а также подготовке к вступительным экзаменам в 10 класс с углублённым изучением математики. Все задания удобно систематизированы в виде таблиц, а выполнять их решение можно непосредственно в тетради-тренажёре. Материалы ориентированы на учебник «Математика. Алгебра. 9 класс. Углублённый уровень» под редакцией С. А. Теляковского; также возможно их применение с другими учебниками по алгебре для 9-го класса.

Пособие адресовано учителям математики, репетиторам, учащимся и их родителям.

УДК 373.167.1:51+51(075.3)

ББК 22.1я721

Электронное издание на основе печатного издания: Алгебра. 9 класс. Углублённый уровень. Тетрадь-тренажёр : учебное пособие / Д. А. Куделина, Е. А. Куделина. — Москва : Издательство «Интеллект-Центр», 2026. — 96 с. — ISBN 978-5-907985-47-6. — Текст : непосредственный.

В соответствии со ст. 1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации.

ISBN 978-5-908080-22-4

© ООО «Издательство «Интеллект-Центр», 2026

© Куделина Д. А., Куделина Е. А., 2025

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта тетрадь-тренажёр продолжает серию пособий, предназначенных помочь учащимся освоить школьную программу по алгебре на высоком уровне.

Изучение алгебры в 7–9 классах крайне важно: знания, полученные на уроках, являются инструментом для изучения других предметных областей, решение задач способствует развитию интеллекта, воспитывает в ребёнке точность, конкретность, последовательность, оперативность. Интерпретируя полученные результаты, он учится объективно оценивать ситуацию, анализировать варианты решения и выбирать из них рациональные.

Многолетняя практика работы в школе показывает, что большое количество учащихся, не обладающих выдающимися математическими способностями, считают алгебру трудным предметом, но учить её должен каждый, и потому очень важно, чтобы это обучение было максимально полезным и, по возможности, приятным.

А можно ли сделать процесс обучения математике эффективным? Могут ли родители помочь своему ребёнку, особенно если алгебра представляет для него определённые трудности? Работая много лет в общеобразовательных и профильных классах, опираясь на свой двадцатилетний опыт обучения детей с разными математическими способностями, решительно отвечаем «да»!

Содержание курса «Алгебра» (7–9 классы) не столько сложно, сколько специфично: все темы, изучаемые на протяжении обучения в школе, как ни в каком другом предмете очень плотно взаимосвязаны друг с другом, а это значит, что, в случае «потери» одной из них (пропустил урок, некачественно или несвоевременно выполнил домашнее задание и пр.), нарушаются многие логические связи, и возникают трудности для дальнейшего освоения, и, увы, учащемуся становится неинтересно.

Одна из основных целей предлагаемой вашему вниманию тетради-тренажёра – помочь учащимся средней школы освоить разделы программы по математике на более глубоком уровне. В тетради-тренажёре собраны задания из личной практики авторов, для выполнения которых требуется более высокая степень владения материалом, понимания и осмысленности действий, эти задания предполагают знакомство учащихся с методами и идеями, необходимыми для дальнейшего успешного углублённого изучения математики.

Собранные в тетради-тренажёре задания систематизированы в таблицы, перед каждой из которых сформулировано задание, которое предлагается выполнить учащемуся. Каждое из заданий пособия, на наш взгляд, целесообразно проработать отдельно, записывая пусть и не подробное решение в пособии. К заданиям приведены необходимые



теоретические сведения, которые отмечены специальным знаком , и в конце пособия даны ответы.

Тетради-тренажёры помогут:

- ученикам получить прочные математические знания;
- родителями помочь своим детям стать успешными в данном предмете;
- учителям повысить свой методический уровень;
- репетиторам максимально эффективно устранить пробелы в знаниях учащихся.

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ

Важно знать:

- ✓ Функция $y = f(x)$ называется возрастающей на множестве X из области определения $D(f)$, если для любого $x_1 \in X$ и для любого $x_2 \in X$ из неравенства $x_1 > x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, т. е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции.
- ✓ Функция $y = f(x)$ называется убывающей на множестве X из области определения $D(f)$, если для любого $x_1 \in X$ и для любого $x_2 \in X$ из неравенства $x_1 > x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, т. е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.
- ✓ Функция $y = f(x)$, убывающая (возрастающая) на множестве X , называется монотонной на множестве X .

✓ СВОЙСТВА МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ:

- Монотонная функция каждое свое значение принимает лишь при одном значении аргумента. Из этого следует, что если $y = f(x)$ – монотонная функция, то уравнение $f(x) = a$, где $a \in R$, имеет не более одного корня.
- Если функция $y = f(x)$ – возрастающая (убывающая), то функция $y = -f(x)$ – убывающая (возрастающая).
- Если функция $y = f(x)$ – возрастающая (убывающая), то функция $y = f(x) + a$, где $a \in R$, – возрастающая (убывающая).
- Если $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – возрастающие (убывающие) функции, то функция $y = f(x) + g(x)$ – возрастающая (убывающая) функция. Следствие: если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют противоположный характер монотонности, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня.
- Если функция $y = f(x)$ – возрастающая (убывающая) на X и не обращается на этом множестве в нуль, то функция $y = \frac{1}{f(x)}$ – убывающая (возрастающая) на X .
- Если $y = f(x)$ и $y = g(x)$ – возрастающие (убывающие) функции, то функции $y = f(g(x))$ и $y = g(f(x))$ – возрастающие функции. Т. е., композиция функций одного и того же характера монотонности есть возрастающая функция.
- Композиция функций разного характера монотонности есть убывающая функция.

- ✓ Функция $y = f(x)$ называется чётной, если выполняются два условия: 1) множество $D(f)$ симметрично относительно нуля, то есть для любого элемента этого множества противоположный ему элемент также принадлежит этому множеству; 2) для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = f(x)$.
- ✓ Функция $y = f(x)$ называется нечётной, если выполняются два условия: 1) множество $D(f)$ симметрично относительно нуля, то есть для любого элемента этого множества противоположный ему элемент также принадлежит этому множеству; 2) для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = -f(x)$.
- ✓ График чётной функции симметричен относительно оси ординат, график нечётной функции симметричен относительно начала координат.

✓ СВОЙСТВА ЧЁТНЫХ ФУНКЦИЙ:

- Если функция $y = f(x)$ является чётной (нечётной), то функция $y = k f(x)$ также является чётной (нечётной).
- Сумма двух чётных функции – чётная функция, а сумма двух нечётных – нечётная функция.
- Если функция $y = f(x)$ чётная (нечётная) и не обращается в нуль, то функция $y = \frac{1}{f(x)}$ – чётная (нечётная).

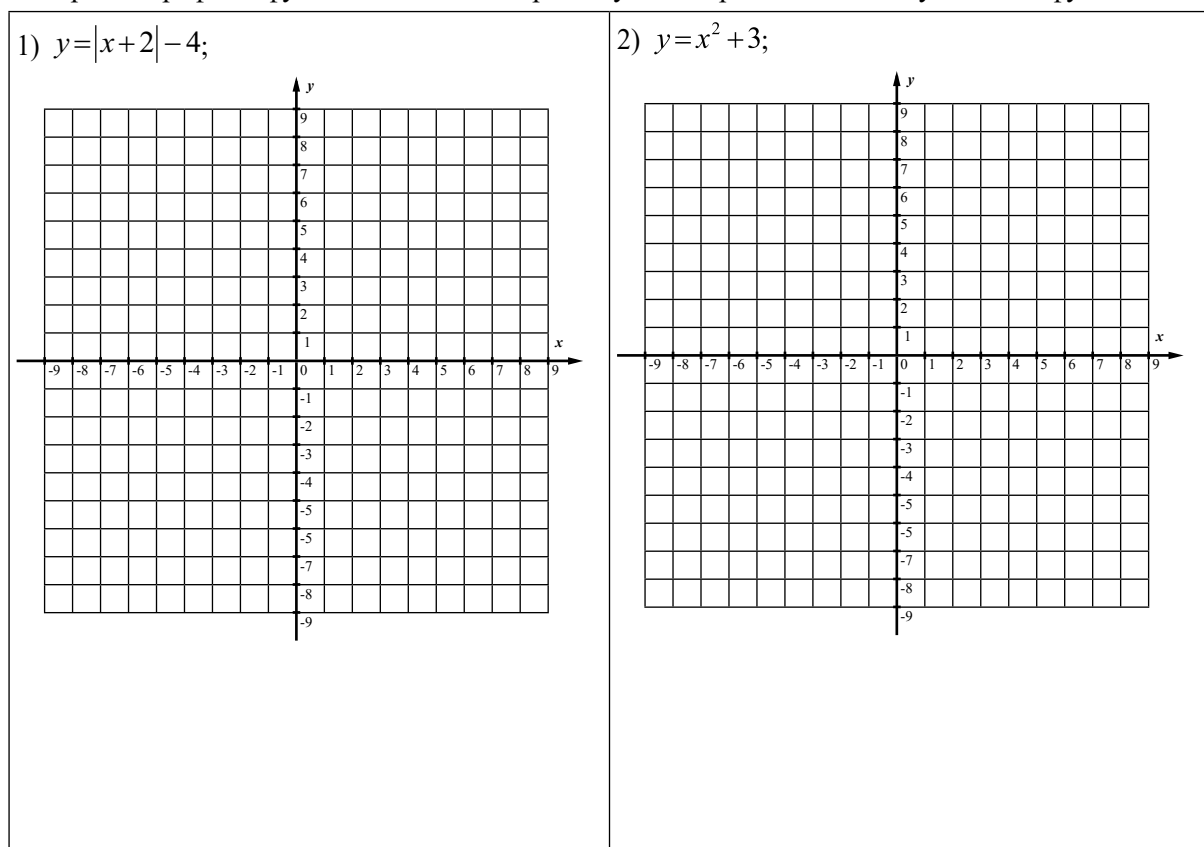
- Произведение двух функций одинаковой чётности – чётная функция, а двух функций разной чётности – нечётная функция.
- Композиция чётной функции с чётной или с нечётной функцией – чётная функция.
- Композиция двух нечётных функций – нечётная функция.
- Композиция произвольной функции с чётной функцией – чётная функция.

✓ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ

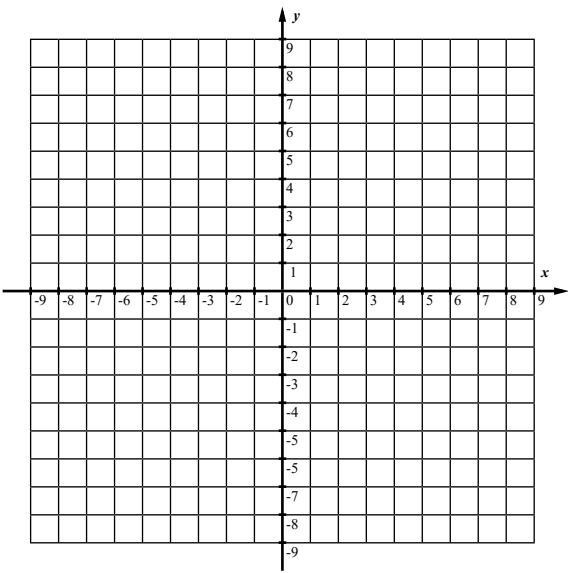
- График функции $y = k \cdot f(x)$ при $k > 1$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ растяжением вдоль оси ординат исходного графика в k раз, а при $0 < k < 1$ – сжатием вдоль оси ординат графика функции $y = f(x)$ в $\frac{1}{k}$ раз.
- График функции $y = -f(x)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью симметрии относительно оси абсцисс.
- График функции $y = f(x) + n$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью сдвига вдоль оси ординат на $|n|$ единиц вверх, если $n > 0$, или вниз, если $n < 0$.
- График функции $y = f(x - t)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ с помощью сдвига вдоль оси абсцисс на $|t|$ единиц вправо, если $t > 0$, или влево, если $t < 0$.
- График функции $y = |f(x)|$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ следующим образом: часть графика $y = f(x)$, расположенную выше оси абсцисс, оставляют на месте, а часть графика, расположенную ниже оси абсцисс, симметрично отображают относительно оси абсцисс.
- График функции $y = f(|x|)$ можно получить из графика функции $y = f(x)$ следующим образом: часть графика $y = f(x)$, расположенную правее оси ординат, оставляют на месте, после чего отображают её симметрично относительно оси ординат, получая ту часть графика $y = f(x)$, которая соответствует отрицательной части области определения функции $y = f(x)$.

Задание 1

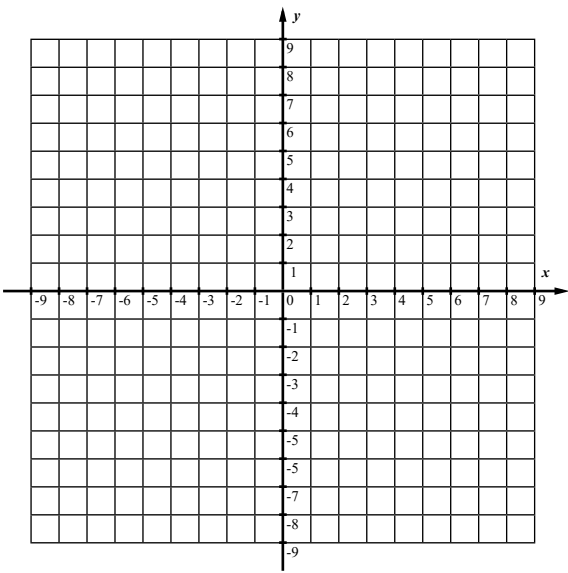
Постройте графики функций и найдите промежутки возрастания и/или убывания функции:



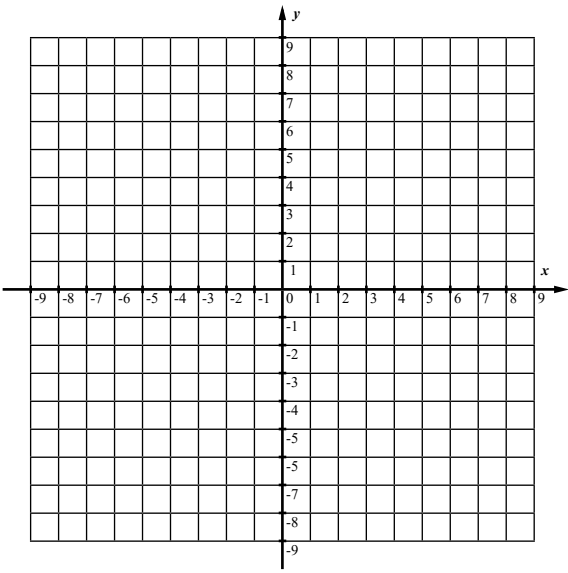
3) $y = -2|x|;$



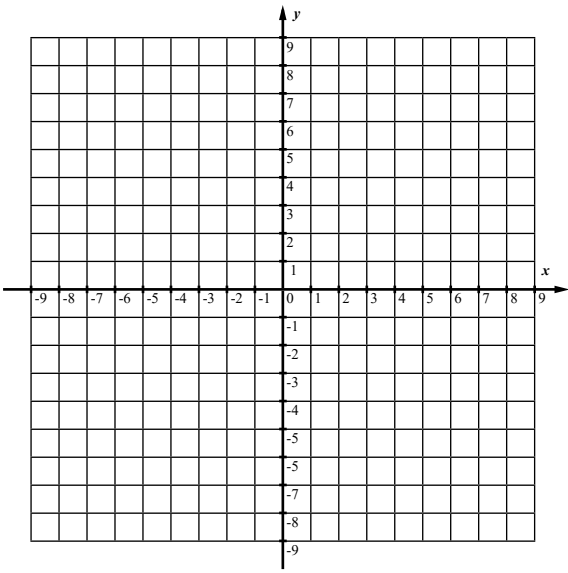
4) $y = 10x - |5x + 4|;$



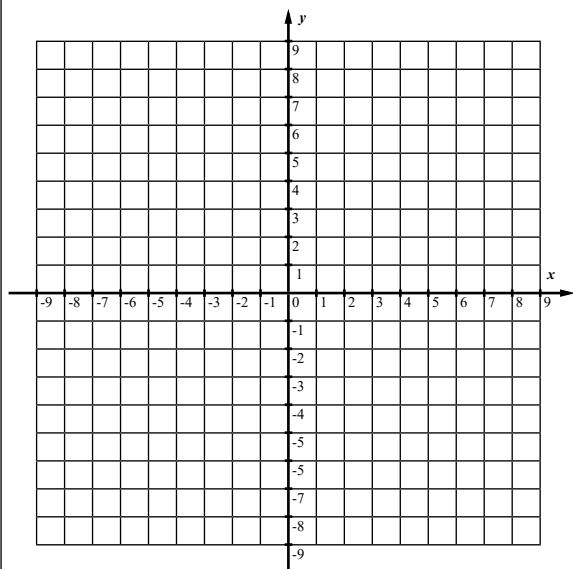
5) $y = 3x + |6x - 2|;$



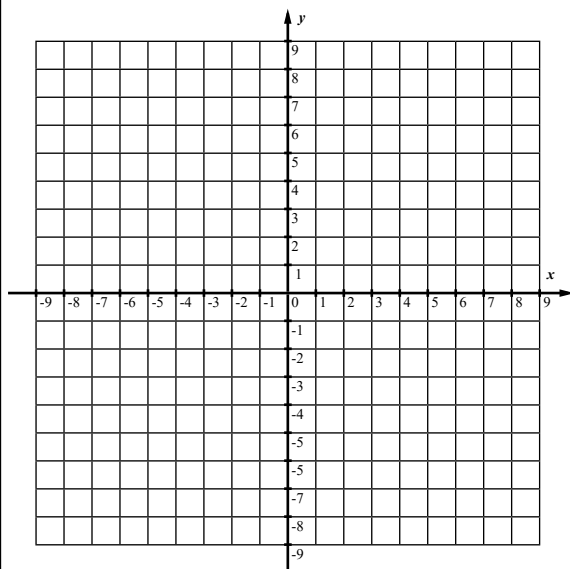
6) $y = 7x + |3x + 1| - |2x + 7|;$



7) $y = 8x - |5x + 4| + |3x - 2|;$



8) $y = |3x + 5| + |3x - 7|.$



Задание 2

При каких значениях параметра a функция:

1) $y = (3a - 6)x + 7a$ является возрастающей;

Ответ: _____

2) $y = (3 - 2|a|)x + |a^2 - 4|$ является убывающей;

Ответ: _____

3) $y = \frac{21|a| - 7}{x}$ является возрастающей на $[2; 7]$;

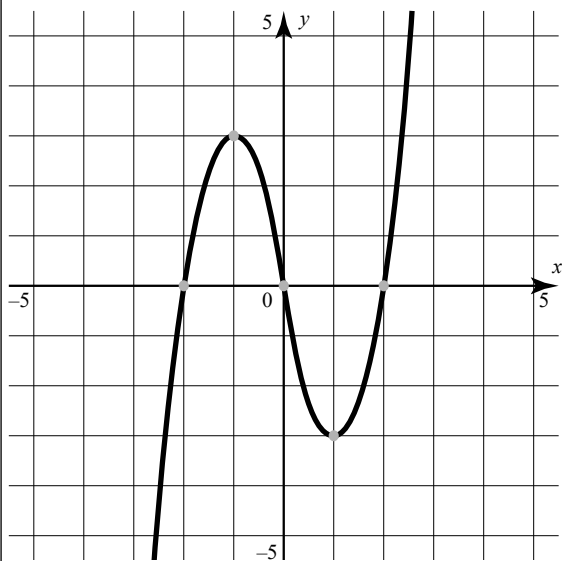
Ответ: _____

4) $y = \frac{7a^2}{x}$ является убывающей на $[-7; -2]$?

Ответ: _____

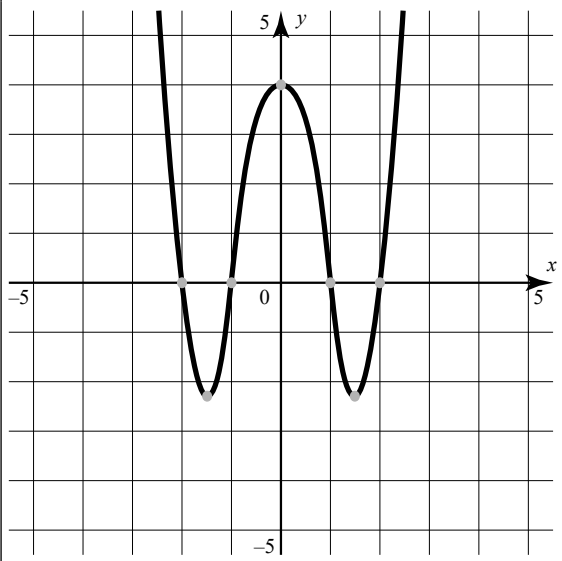
Задание 3

1) На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Какие из следующих утверждений о данной функции неверны?



- а) Функция возрастает на промежутке $(-\infty; -1]$.
- б) Наибольшее значение функции равно 3.
- в) $f(-2) \neq -f(2)$.
- г) Функция не является нечётной.
- д) $f(-1,5) < f(1,5)$.
- е) $f(x) < 0$ при $x < 2$.

2) На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Какие из следующих утверждений о данной функции верны?



- а) Функция возрастает на промежутке $(-1; 1)$.
- б) Наименьшее значение функции равно -3 .
- в) $f(-2) = f(2)$.
- г) Функция является чётной.
- д) $f(-2,5) < f(2,5)$.
- е) $f(x) > 0$ при $x > 2$.

Задание 4

Найдите промежутки монотонности функции:

1) $y = (x+1)^2 + \sqrt{x}$;

2) $y = \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-5}$;

Ответ: _____

Ответ: _____

$$3) \ y = \sqrt{4-x} + \frac{1}{x};$$

ОТВЕТ: _____

4) $y = \sqrt{4+x} - \frac{1}{x}$.

ОТВЕТ: _____

Задание 5

Решите уравнение:

$$1) \sqrt{x+41} + \sqrt{x+9} + \sqrt{x-15} = 21;$$

Ответ: _____

$$2) \ x^2 + \sqrt{x-3} - \frac{18}{x-6} = 144;$$

ОТВЕТ: _____

$$3) \ x^2 + |x| + \sqrt{x} + 2x - 3 = 27;$$

Ответ: _____

4) $x^2 + |x+1| + \sqrt{x} + 3x - 5 = 2;$

Ответ: _____

$$5) (x^2 + 4x + 9)\sqrt{4x + 1} = 9;$$

Ответ: _____

6) $x^5 + x^3 + 6x^2 + 12x = 88$.

Ответ: _____

Задание 6

Исследуйте на чётность функцию:

1) $y = \frac{x-3}{x^2-16}$; Ответ: _____	2) $y = x^2$, где $-3 \leq x \leq 1$; Ответ: _____
3) $y = \frac{2x^2 + 3 x-3 + 3 x+3 }{ x -2}$; Ответ: _____	4) $y = \frac{2x^3 + 3x x }{x+2}$; Ответ: _____
5) $y = \frac{x-2}{x^2+5}$; Ответ: _____	6) $y = \sqrt{(x +1)^2} - 4$; Ответ: _____
7) $y = \sqrt{ x -4}$; Ответ: _____	8) $y = \sqrt{5-x} + \sqrt{x+5}$; Ответ: _____

$$9) y = \frac{5x+6}{x^2-x+1} + \frac{5x-6}{x^2+x+1};$$

Ответ: _____

$$10) y = \frac{x^3}{\sqrt{3-x} - \sqrt{x+3}}.$$

Ответ: _____

Задание 7

Известно, что $y = f(x)$ чётная функция и $f(1) + f(-2) = 4$. Найдите:

$$1) f(-1) + f(-2);$$

Ответ: _____

$$2) 2f(1) + 3f(-2) - f(2);$$

Ответ: _____

$$3) f(1) + f(2);$$

Ответ: _____

4) $7f(1)+8f(-2)-2f(-1)-3f(2)$.

Ответ: _____

Задание 8

Известно, что $y=f(x)$ — нечётная функция и $f(-5)+f(2)=11$. Найдите:

1) $f(5)+f(-2)$;

Ответ: _____

2) $f(5)+f(2)+f(-5)+f(-2)$;

Ответ: _____

3) $-f(5)-f(-2)+1$;

Ответ: _____

4) $f(-5) - f(-2) + f(2) - f(5)$.

Ответ: _____

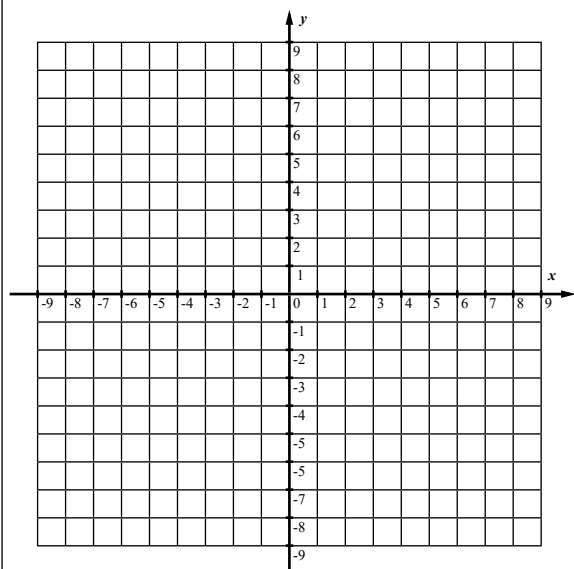
Задание 9

Функция $y = f(x)$, определённая на множестве всех действительных чисел, является нечётной.

Известно, что при $x \geq 0$ функция задаётся формулой $f(x) = x^2 - 2x$.

Постройте график функции $y = f(x)$ и с его помощью определите:

- а) нули функции;
- б) все значения аргумента, при которых $f(x) > 0$;
- в) промежутки монотонности;
- г) множество значений функции.



Ответ: _____

Задание 10

Решите уравнение, используя свойства функций:

1) $x^8 + 2x^6 + 3x^4 = 6$;

2) $\sqrt{x^2 + 12} + \sqrt{5x^2 - 4} = 8$.

Ответ: _____

Ответ: _____

Задание 11

При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{11+9x+x^2} + \sqrt{11-9x+x^2} = a$ имеет нечётное число разных корней?

Ответ: _____

Задание 12

Найдите среднее арифметическое корней уравнения $6x^5 - 3x + \frac{1}{x} = \sqrt{8+8x} - \sqrt{8-8x}$.

Ответ: _____

Задание 13

Найдите сумму всех корней уравнения $5x^2 - 3|x| + \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 + 3|x| + 14}{x^2 + 5}$.

Ответ: _____

Задание 14

Решите уравнение, используя свойства функций:

1) $1 + \sqrt{(x-1)^2} = -x^2 + 2x - 1;$	2) $\frac{1}{x^2 + 2x + 2} = 1 + \sqrt{x+1}.$
Ответ: _____	Ответ: _____

Задание 15

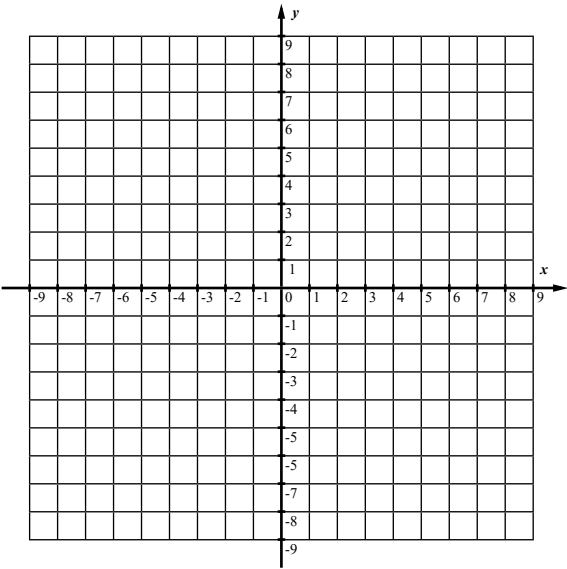
Найдите область значений функции:

1) $y = \frac{x^2 + 1}{8x};$	Ответ: _____
2) $y = \sqrt{x^2 - 16};$	Ответ: _____
3) $y = 5 - x + 2 .$	Ответ: _____

Задание 16

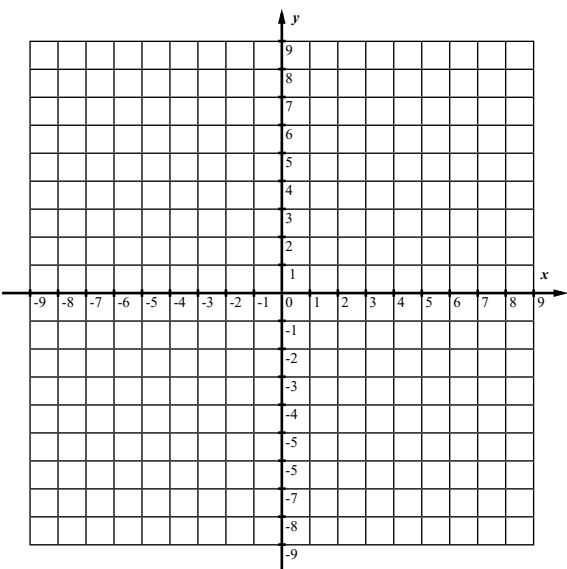
Сколько корней имеет уравнение в зависимости от значения параметра a ? Воспользуйтесь графическим методом:

1) $|x - 2| - 2 = a;$



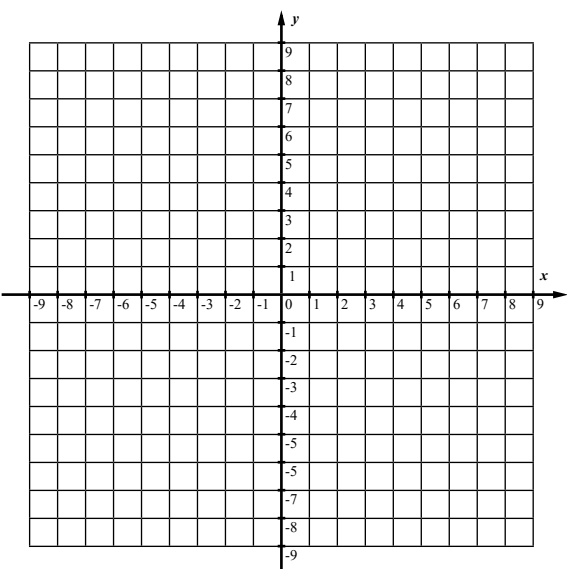
Ответ: _____

2) $||x - 2| - 2| = a;$



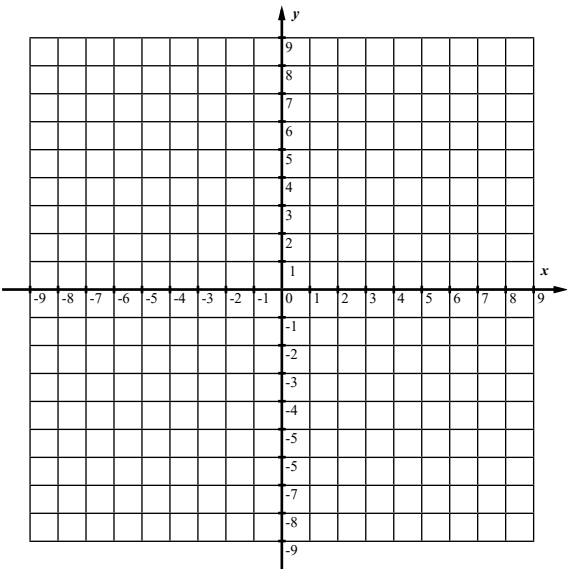
Ответ: _____

3) $||x - 2| - 2| - 2 = a;$



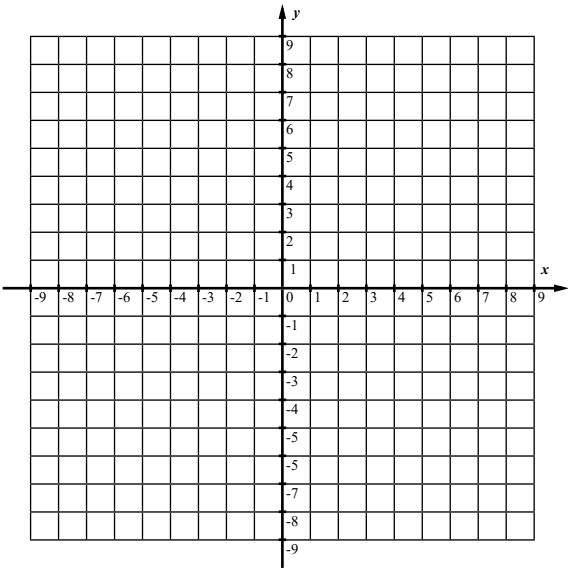
Ответ: _____

4) $|x^2 - 5|x| + 6| = a;$



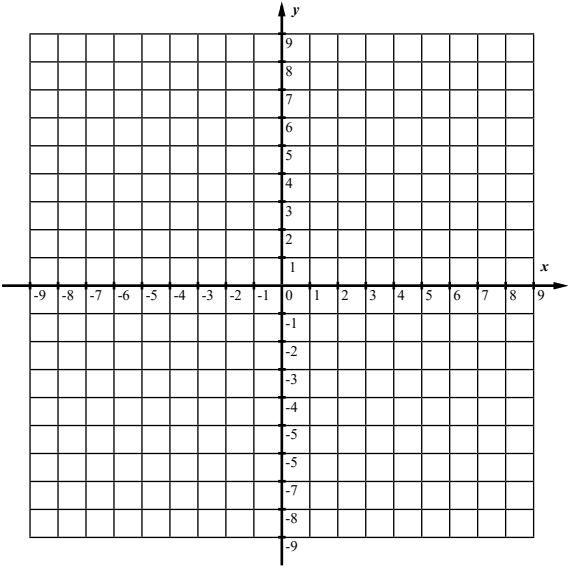
Ответ: _____

5) $(|x-2|-1)^2 = a;$



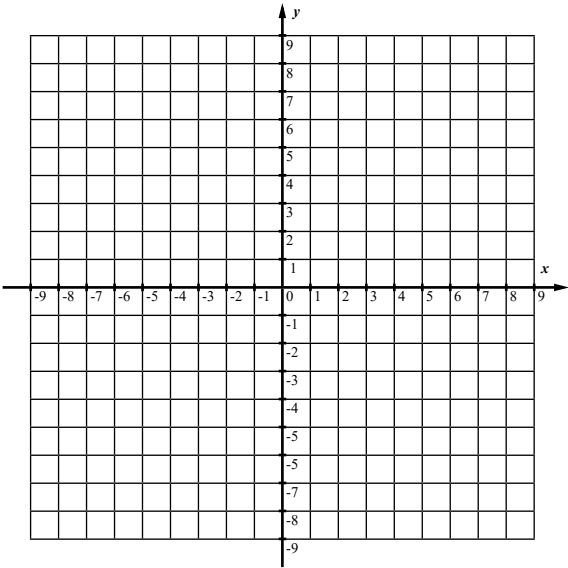
Ответ: _____

6) $\sqrt{|x-2|-3} = a;$



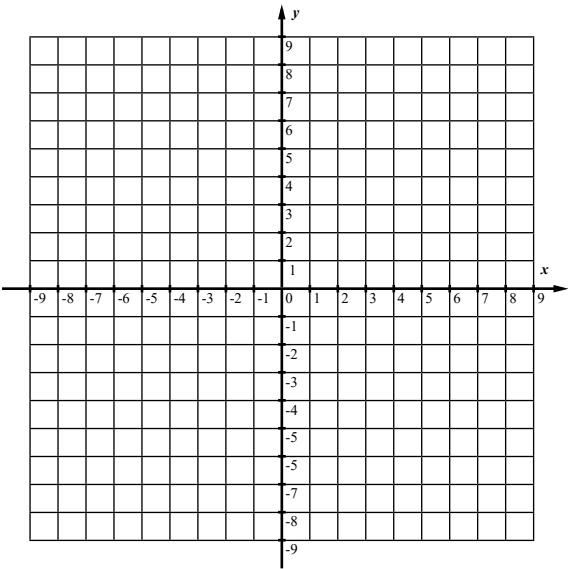
Ответ: _____

7) $\frac{1}{|x-1|-4} = a;$



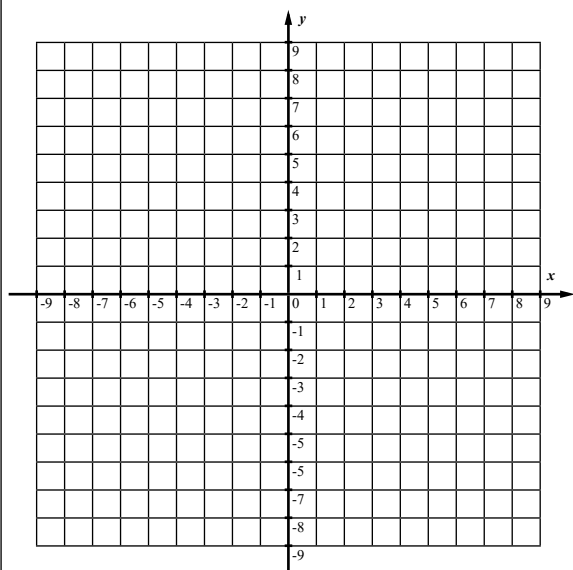
Ответ: _____

8) $\left|(|x|-1)^2 - 1\right| = a;$



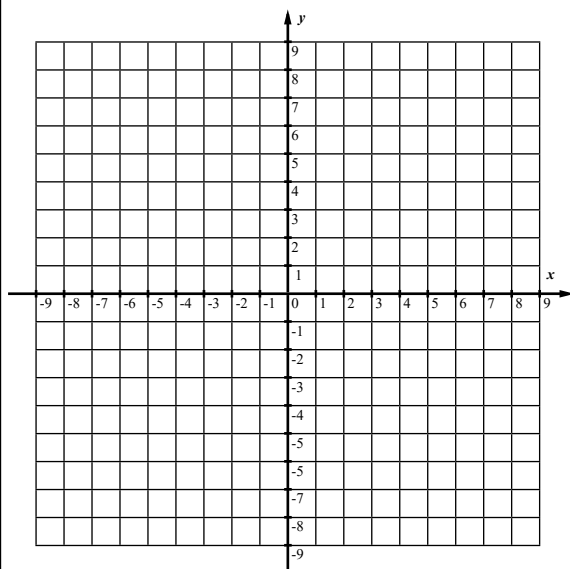
Ответ: _____

9) $|\sqrt{x} - 2| = a;$



Ответ: _____

10) $\left| \frac{4}{|x|} - 2 \right| = a.$

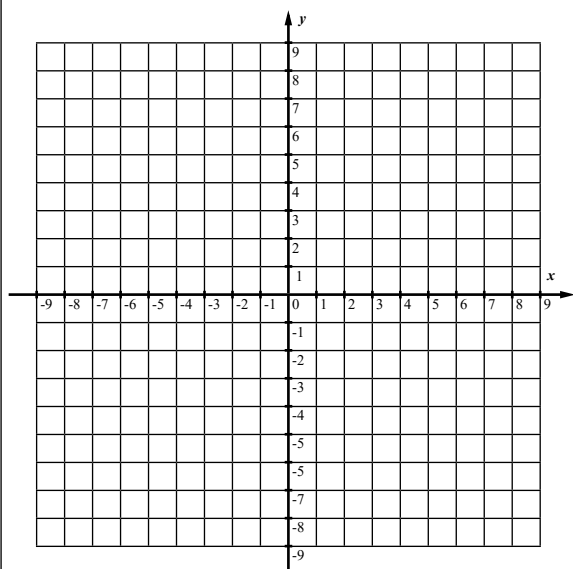


Ответ: _____

Задание 17

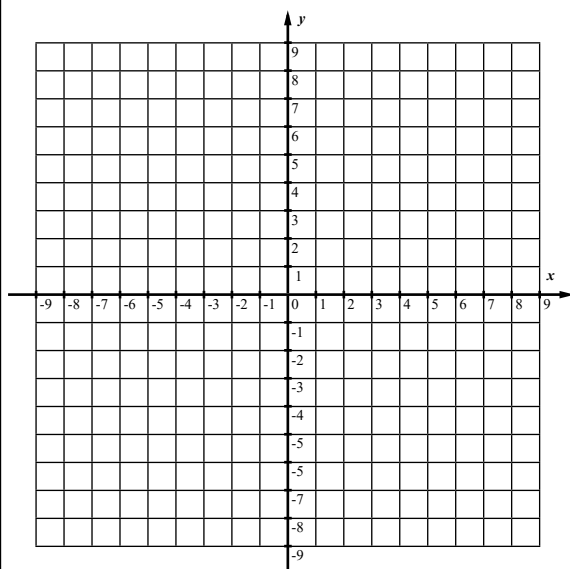
Дана функция $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Постройте графики функций:

1) $y = f(-x);$



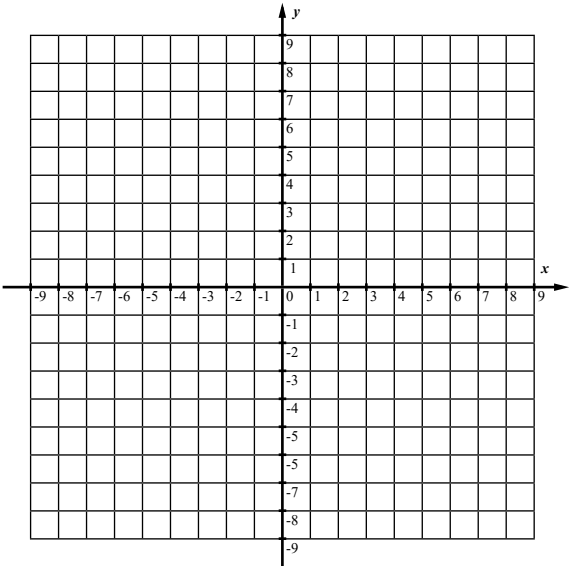
Ответ: _____

2) $y = f(-2x);$



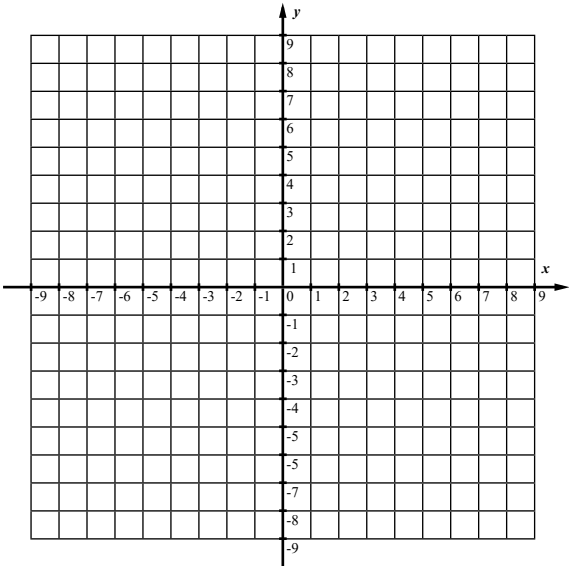
Ответ: _____

3) $y=|f(x)|;$



Ответ: _____

4) $y=f(|x|).$

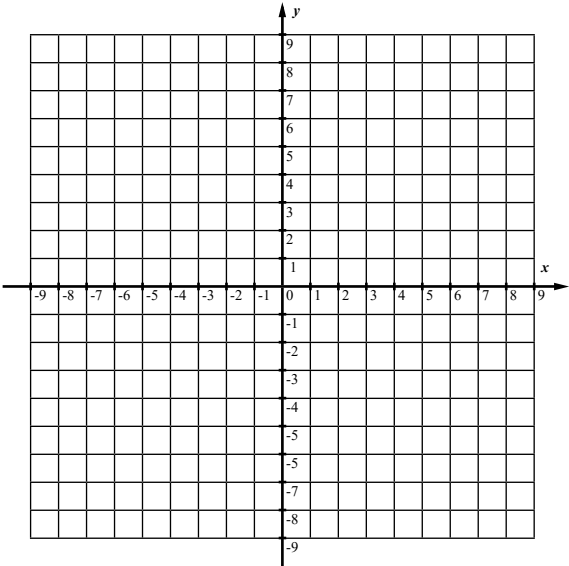


Ответ: _____

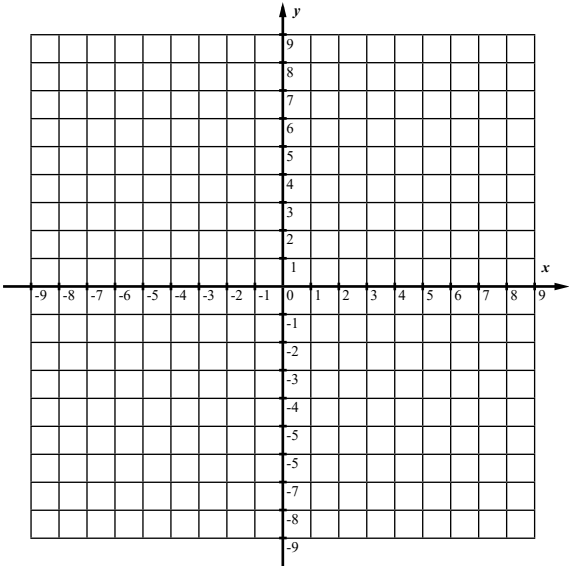
Задание 18

Дана функция $f(x)=1+\frac{4}{x-1}$. Постройте графики функций:

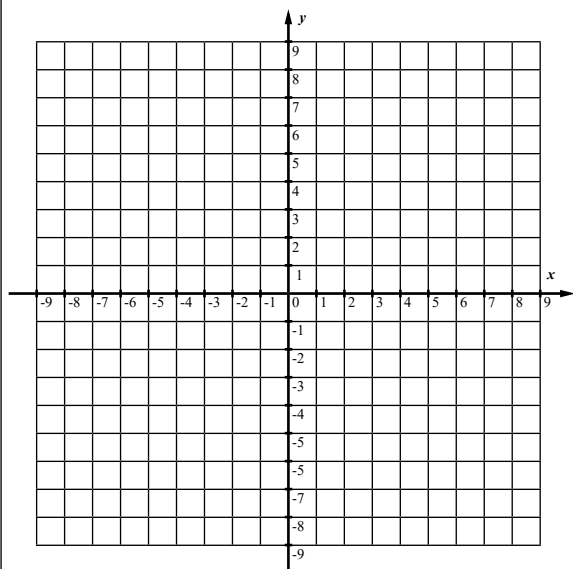
1) $y=f(-x);$



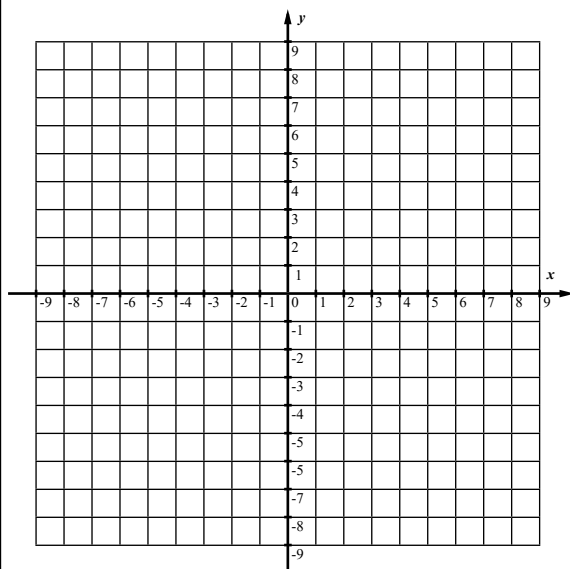
2) $y=f(-2x);$



3) $y = |f(x)|;$



4) $y = f(|x|).$



Задание 19

При каких значениях параметра a :

1) уравнение $||x+2|-3|=a-x$ имеет бесконечно много корней;

Ответ: _____

2) уравнение $|2|x-1|-3|=x-a$ имеет три корня;

Ответ: _____

3) уравнение $|2|x+a|-1|=x-1$ имеет единственный корень?

Ответ: _____

УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Важно знать:

- ✓ Если уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$, в котором все коэффициенты – целые числа, причём свободный член отличен от нуля, имеет целый корень, то этот корень является делителем свободного члена.
- ✓ Если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем уравнения $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$, в котором все коэффициенты – целые числа, причём свободный член отличен от нуля, то число p является делителем свободного члена a_n , а число q — делителем старшего коэффициента a_0 .
- ✓ Если число a является корнем многочлена $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, причём свободный член отличен от нуля, то этот многочлен можно представить в виде произведения $(x - a)P_1(x)$, где $P_1(x)$ – многочлен $(n - 1)$ -й степени.
- ✓ Некоторые методы решения уравнений высших степеней:
 - Разложение на множители (группировка, формулы сокращённого умножения, деление уголком, схема Горнера, метод неопределённых коэффициентов),
 - Введение новой переменной (в том числе для симметрических уравнений).
- ✓ Если уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ имеет n различных корней $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$, то они удовлетворяют равенствам:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{n-1} + x_n = -\frac{a_1}{a_0},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0},$$

$$x_1x_2x_3 \dots x_{n-1}x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

Задание 20

Решите уравнение, используя метод деления «уголком»:

1) $2x^3 - x - 1 = 0$;	2) $x^3 + x - 2 = 0$;
Ответ: _____	Ответ: _____
3) $x^3 + 3x^2 + 7x + 10 = 0$;	4) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$;
Ответ: _____	Ответ: _____

5) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15 = 0$;	6) $x^3 + 4x^2 - 2x - 8 = 0$;
	Ответ: _____
7) $x^3 - 5x^2 + 28 = 0$;	8) $x^3 - 5x^2 + 16x - 12 = 0$.
	Ответ: _____

Задание 21

Решите уравнение, используя схему Горнера:

1) $x^3 + 3x + 4 = 0$;	2) $x^3 - 2x^2 - 9 = 0$;
Ответ: _____	Ответ: _____
3) $x^3 - 13x - 18 = 0$;	4) $x^3 - 4x^2 - 27x + 90 = 0$;
Ответ: _____	Ответ: _____
5) $x^3 - 6x^2 + 3x + 10 = 0$;	6) $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$;
Ответ: _____	Ответ: _____
7) $x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0$;	8) $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$;
Ответ: _____	Ответ: _____

9) $6x^3 - x^2 - 20x + 12 = 0;$	10) $x^3 - x^2 - \frac{8}{x^3 - x^2} = 2.$
Ответ: _____	Ответ: _____

Задание 22

Решите уравнение, используя метод неопределенных коэффициентов:

1) $x^4 - 9x^2 + 6x + 4 = 0;$	2) $x^4 - x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = 0;$
Ответ: _____	Ответ: _____
3) $x^4 + x^3 - x^2 - 4x - 2 = 0;$	4) $x^4 - x^3 - 3x^2 - 4x - 2 = 0.$
Ответ: _____	Ответ: _____

Задание 23

Решите уравнение:

1) $y^4 + y^3 - 4y^2 + y + 1 = 0;$	2) $y^4 - 6y^3 - 5y^2 - 6y + 1 = 0;$
Ответ: _____	Ответ: _____
2) $y^4 - 7y^3 - 6y^2 - 7y + 1 = 0;$	4) $y^4 - 6y^3 + 11y^2 - 6y + 1 = 0.$
Ответ: _____	Ответ: _____

Задание 24

1) Пусть x, y, z – корни уравнения $6t^3 + pt^2 - qt + 18 = 0$. Найдите xy , если $z = 3$.

Ответ: _____

2) Пусть x, y, z – корни уравнения $t^3 - 2t^2 - 9t - 1 = 0$. Найдите $\frac{yz}{x} + \frac{yx}{z} + \frac{zx}{y}$.

3) Попарно различные числа x, y, z таковы, что $x^3 - 3x = y^3 - 3y = z^3 - 3z$. Найдите $x^2 + y^2 + z^2$.

Ответ: _____

Задание 25

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение:

1) $x^4 - 4x^3 + 16x - 4ax - 16 + 8a - a^2 = 0$ имеет не менее трёх корней;

Ответ: _____

2) $x^4 - 5x^2 - 3x^3 + 21x + 3ax - 14 - 9a - a^2 = 0$ имеет два корня.

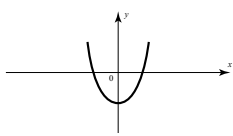
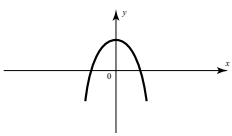
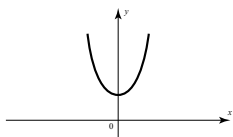
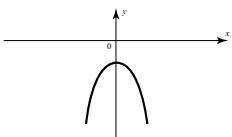
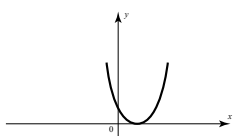
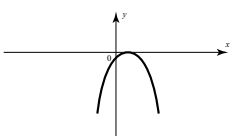
Ответ: _____

НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Важно знать:

✓ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КВАДРАТНЫХ НЕРАВЕНСТВ

- Решение с использованием свойств квадратичной функции (схематическое изображение параболы):
 - Находят дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ и выясняют, имеет ли трёхчлен корни.
 - Если трёхчлен имеет корни, то отмечают их на оси x и через отмеченные точки проводят схематически параболу, ветви которой направлены вверх при $a > 0$ или вниз при $a < 0$; если трёхчлен не имеет корней, то схематически изображают параболу, расположенную в верхней полуплоскости при $a > 0$ или в нижней при $a < 0$.
 - Находят на оси x промежутки, для которых точки параболы расположены выше оси x (если решают неравенство $ax^2 + bx + c > 0$) или ниже оси x (если решают неравенство $ax^2 + bx + c < 0$).

$D \backslash a$	$a > 0$	$a < 0$
$D > 0$		
$D < 0$		
$D = 0$		

- Метод интервалов
 - Приводим неравенство к виду, приспособленному для метода интервалов: справа стоит ноль, левая часть максимально упрощена (если возможно – разложена на множители).
 - Находим ОДЗ неравенства.
 - Находим нули левой части. Для этого приравниваем левую часть к нулю и решаем уравнение.
 - Отмечаем на числовой оси ОДЗ и найденные нули. Нули отмечаются выколотыми точками, если неравенство строгое, и закрашенными, если неравенство нестрогое.
 - Определяем знаки выражения из левой части неравенства на полученных интервалах, содержащихся в ОДЗ, подставляя удобные значения, принадлежащие каждому промежутку.
 - Записываем ответ, указывая объединение промежутков, на которых имеется соответствующий знак.

✓ ОСНОВНЫЕ ПРИЕМЫ РЕШЕНИЙ НЕРАВЕНСТВ С ПЕРЕМЕННОЙ ПОД ЗНАКОМ МОДУЛЯ:

- $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x); \end{cases}$
- $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x); \end{cases}$
- $|f(x)| < |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) < g^2(x);$

Задание 26

Решите неравенство:

1) $\frac{9-x^2}{x+2} \leq 0;$ Ответ: _____	2) $\frac{x+4}{3x^2-x-2} < 0;$ Ответ: _____
3) $\frac{2x+3}{2x^2-5x+2} \leq 0;$ Ответ: _____	4) $\frac{x^2+x-2}{3-x} < 0;$ Ответ: _____
5) $\frac{x^2-2x+1}{x-2} > 0;$ Ответ: _____	6) $\frac{3-x}{x^2+4x+4} \leq 0;$ Ответ: _____
7) $\frac{x^2-4x+4}{x+1} \leq 0;$ Ответ: _____	8) $\frac{x^2}{2-x} < 0;$ Ответ: _____
9) $(x^2-4)(x-1)^2 \geq 0;$ Ответ: _____	10) $\frac{x^2-6x+9}{x^2+3x-4} \leq 0;$ Ответ: _____

11) $\frac{x^4 - 8x^3 + 16x^2}{x^2 - 6x + 5} \geq 0;$	12) $\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 4} \geq 0;$
Ответ: _____	Ответ: _____
13) $(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4 \leq 0;$	14) $\frac{x(x-1)^2(x+2)^3(x-3)^4}{(x+1)^5(x-2)^6(x+3)^7} \geq 0;$
Ответ: _____	Ответ: _____
15) $(x^2 - 4x)^2 \geq 16;$	16) $\frac{1}{3-2x} \leq 1;$
Ответ: _____	Ответ: _____
17) $\frac{x-3}{3x} \geq \frac{1}{2};$	18) $\frac{2-3x}{x+2} \leq 5;$
Ответ: _____	Ответ: _____
19) $x \leq \frac{2}{x+1};$	20) $4x+7 \leq \frac{2}{x};$
Ответ: _____	Ответ: _____

$$21) x \leq 3 - \frac{1}{x-1};$$

Ответ: _____

$$22) \frac{x+7}{x-2} > x-1.$$

Ответ: _____

Задание 27

Найдите все такие значения переменной, при которых выполняется ровно два неравенства из трёх:

$$1) \frac{1}{a-2} - \frac{6}{a-5} > 1, \quad \frac{a^2}{a-3} \geq 0, \quad 2a-1 < \frac{4}{3}a;$$

Ответ: _____

$$2) \frac{3}{a-3} + 1 > \frac{1}{6+a-a^2}, \quad \frac{2}{7}a+1 \geq 0, \quad \frac{1}{a-1} > \frac{1}{3};$$

Ответ: _____

$$3) \frac{a-3}{a} + \frac{1}{a-3} < \frac{2}{3a-a^2}, \quad \frac{2}{3}a-6 > 4-a, \quad \frac{a^2+15}{a-1} \leq 10;$$

Ответ: _____

$$4) \frac{1}{3+2a-a^2} > \frac{1}{4}, \quad \frac{a+1}{2} \leq 3, \quad \frac{2}{a+2} < 1.$$

Ответ: _____

Задание 28

При каких значениях параметра a решением неравенства $ax^2 - 2(a+1)x + 4a < 0$ является пустое множество?

Ответ: _____

Задание 29

При каких значениях параметра a множеством решений неравенства:

1) $(x+a)^2(x-5)(x+7) < 0$ является числовой промежуток $(-7; 5)$;

Ответ: _____

2) $(x-a)^2(x-3)(x+4) > 0$ является объединение числовых промежутков $(-\infty; -4)$ и $(3; +\infty)$?

Ответ: _____

Задание 30

При всех значениях параметра a решите неравенство:

1) $ax^2 \geq x + 2$;

Ответ: _____

$$3) \frac{ax-2}{x^2-3x-4} \geq 0;$$

Ответ: _____

$$4) \frac{ax+2}{x+2} \geq 0.$$

Ответ: _____

Задание 31

Решите неравенство:

$$1) \left| \frac{x^2-2}{x+1} \right| < x;$$

Ответ: _____

$$2) |x-1| \geq |2x+1|;$$

Ответ: _____

$$3) \left| x - \frac{1}{x} \right| > 1 - x;$$

Ответ: _____

$$4) \left(\frac{x^2-1}{x+2} \right)^2 \geq 4 + 3 \cdot \left| \frac{x^2-1}{x+2} \right|;$$

Ответ: _____

$$5) \frac{x^4}{x^2-2x+1} + \frac{x^2}{|x-1|} \geq 20;$$

Ответ: _____

$$6) |x^2-2x| + |x+1| \geq 5;$$

Ответ: _____

7) $\left \frac{x^2 - 3x}{x - 2} \right \geq x^2 - 9 ;$ Ответ: _____	8) $\left \frac{x^2 + 2x}{x - 1} \right \geq x^2 - x - 6 ;$ Ответ: _____
9) $x^3 + 2x - 3 + x^2 - 1 \leq x^3 + x^2 + 2x - 4 ;$ Ответ: _____	10) $x^2 - 4x - 3 + x^2 + 3x \leq x + 3 - 2x^2 ;$ Ответ: _____
11) $x^2 + x - 2 + x^2 + 2x - 3 \leq 2x^2 + 3x - 5 ;$ Ответ: _____	12) $3x - 1 + x^2 - 4 \leq 5 - 3x - x^2 .$ Ответ: _____

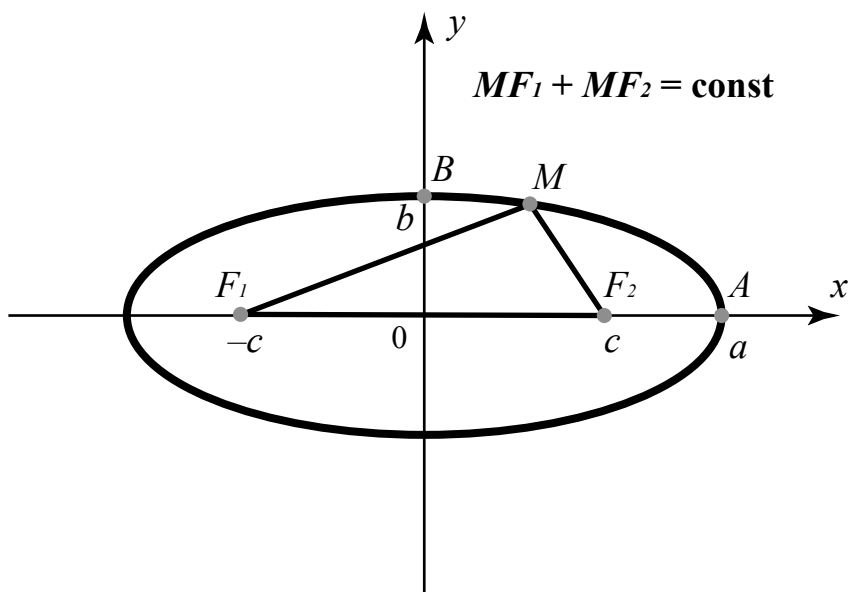
УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ

Важно знать:

- ✓ Уравнение прямой имеет вид $ax + by = c$, где a, b, c – некоторые числа, причём a, b не равны нулю одновременно.

Значения a, b, c	Вид графика уравнения
$a = 0, b \neq 0, c$ – любое число	Горизонтальная прямая
$a \neq 0, b \neq 0, c$ – любое число	Прямая, тангенс угла наклона которой равен $-\frac{a}{b}$
$a \neq 0, b = 0, c$ – любое число	Вертикальная прямая
$a = b = c = 0$	Вся координатная плоскость
$a = b = 0, c \neq 0$	Пустое множество

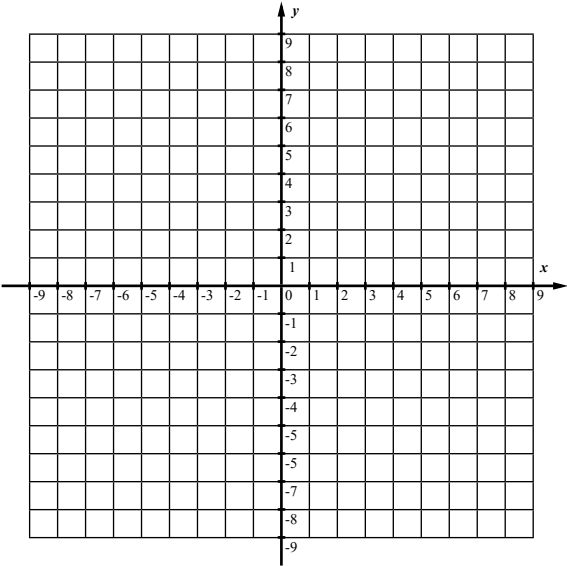
- ✓ Прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$.
- ✓ Прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1 \cdot k_2 = -1$.
- ✓ Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $A(a; b)$ имеет вид $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.
- ✓ Если центром окружности является начало координат, уравнение имеет вид $x^2 + y^2 = R^2$.
- ✓ Уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где a, b – некоторые числа, причем a, b не равны нулю.
- ✓ Эллипсом называют геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек F_1 и F_2 является постоянной величиной, большей чем $F_1F_2 = 2c$. Точки F_1 и F_2 называют фокусами эллипса. Отрезки $OA = a$ и $OB = b$ называют соответственно большой и малой полуосями эллипса, причём $a^2 - b^2 = c^2$



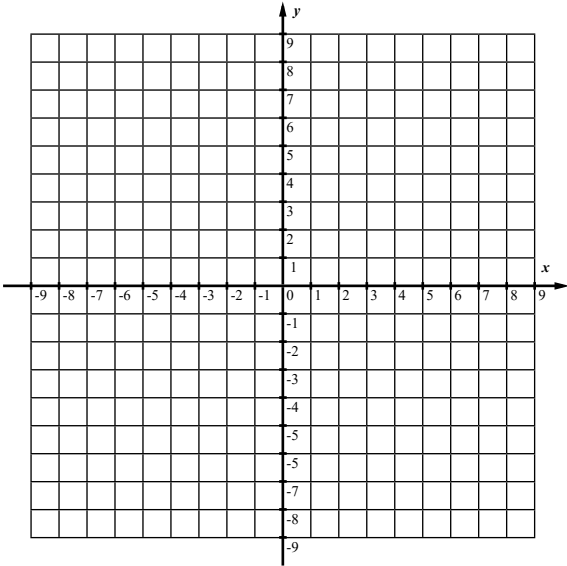
Задание 32

Постройте график уравнения:

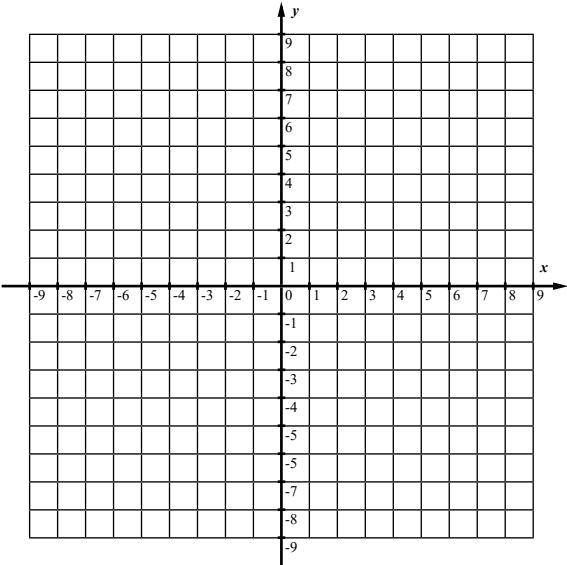
1) $2y + |x| - 3 = 0;$



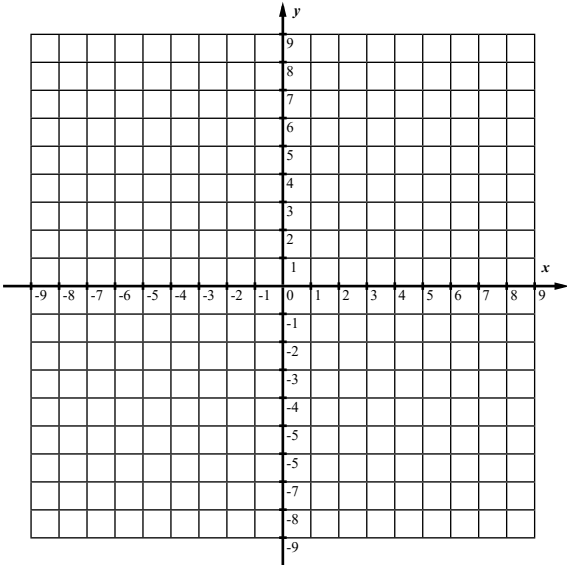
2) $|x + 3| = |y - 2|;$



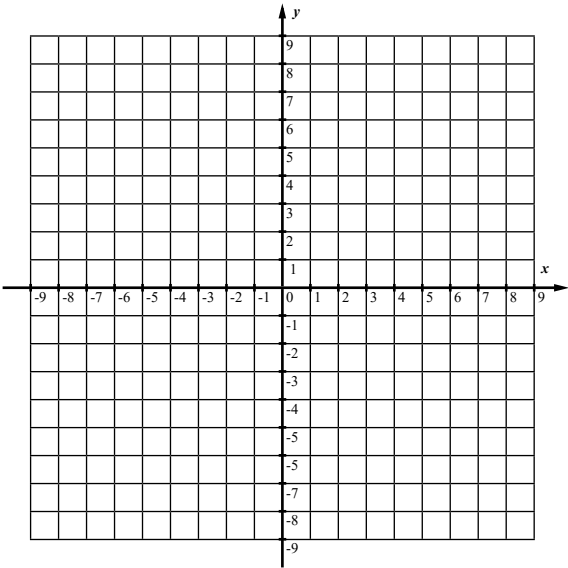
3) $xy = |x|;$



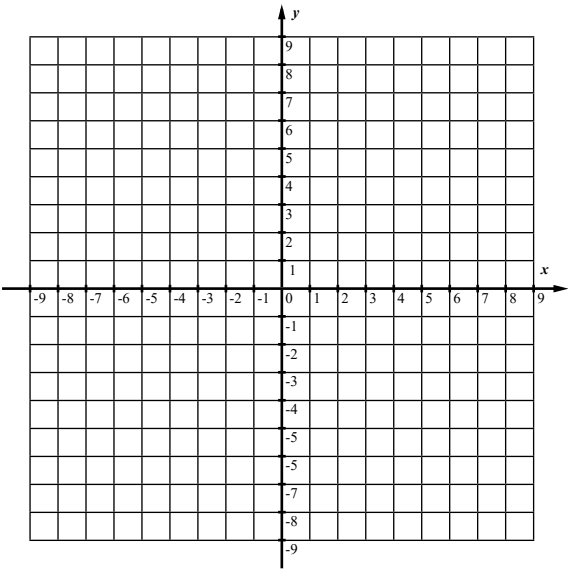
4) $|x - 2y| = 2;$



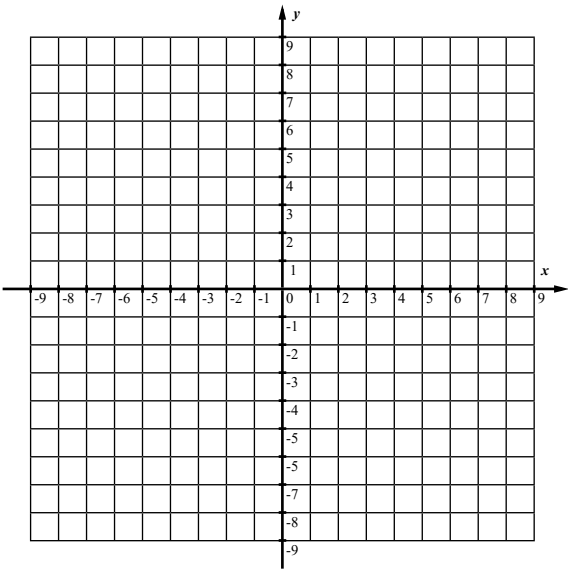
5) $(x-2)^2=(y-1)^2$;



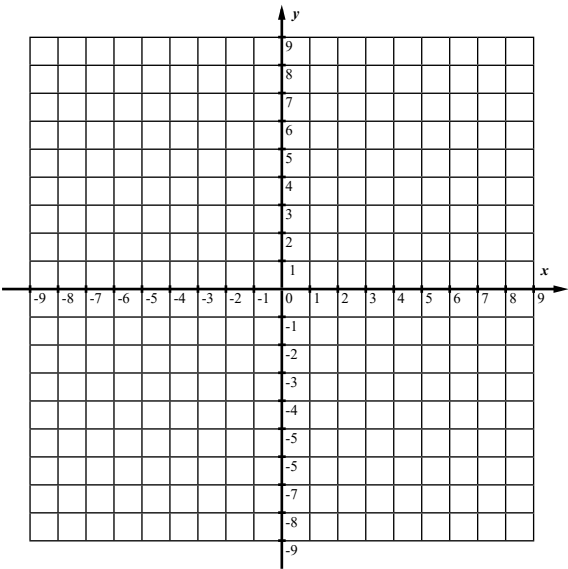
6) $x^2-6xy+9y^2=0$;



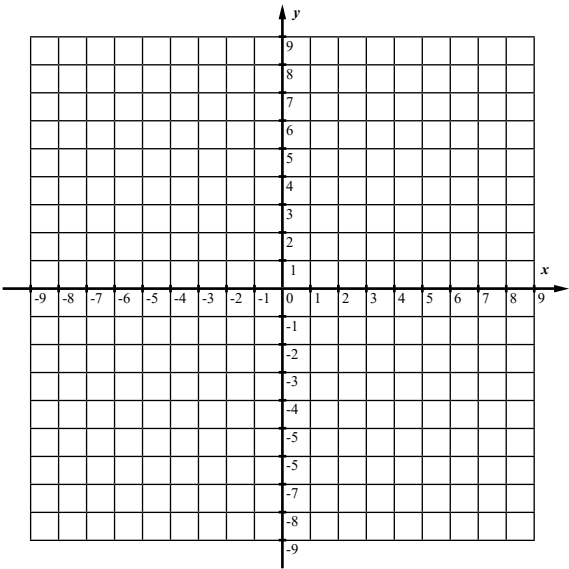
7) $x^2-6xy+5y^2=0$;



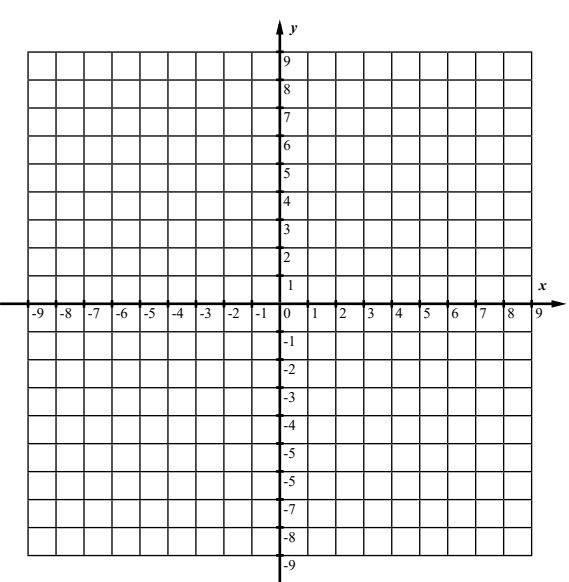
8) $(x-2)^2+(y+4)^2=9$;



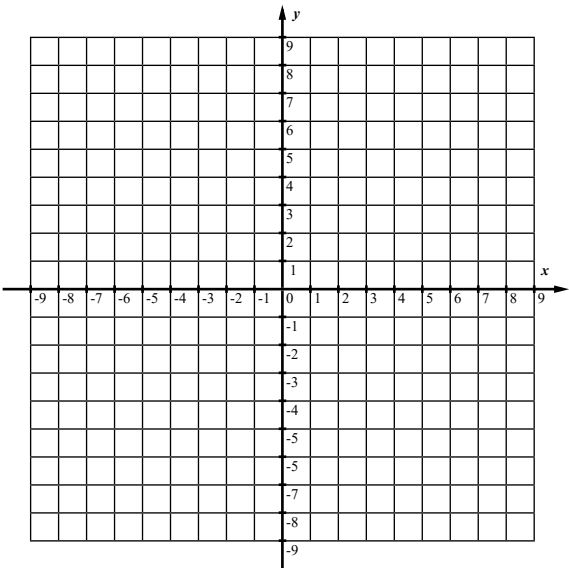
9) $x^2 - 4x + y^2 - 2y = 4;$



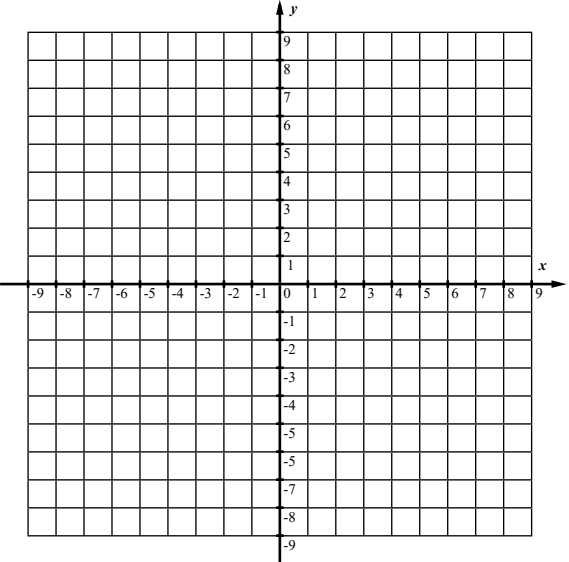
10) $(|x| - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4;$



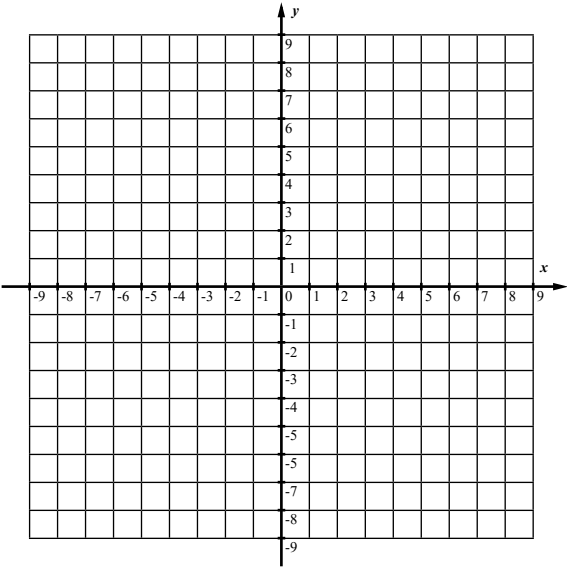
11) $(|x| - 2)^2 + (|y| - 2)^2 = 16;$



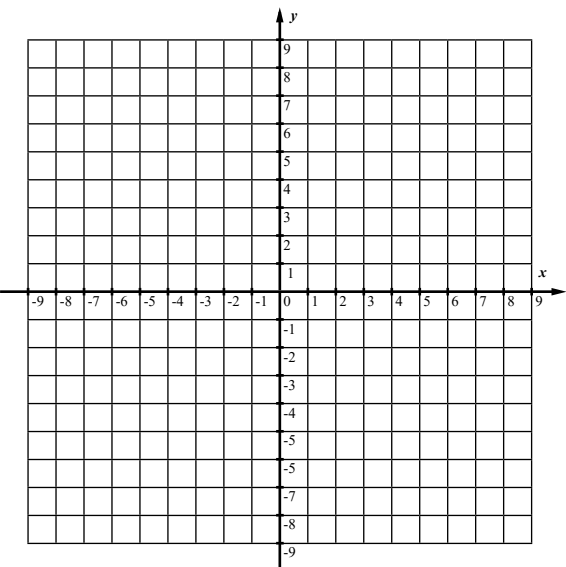
12) $(2x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 9;$



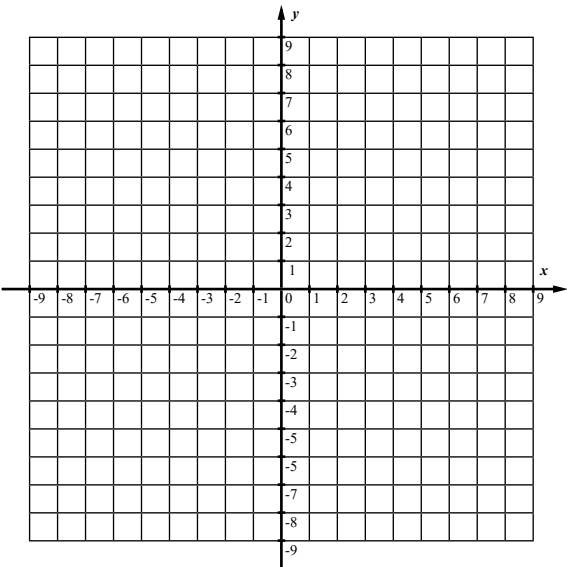
13) $9x^2 + y^2 = 4$;



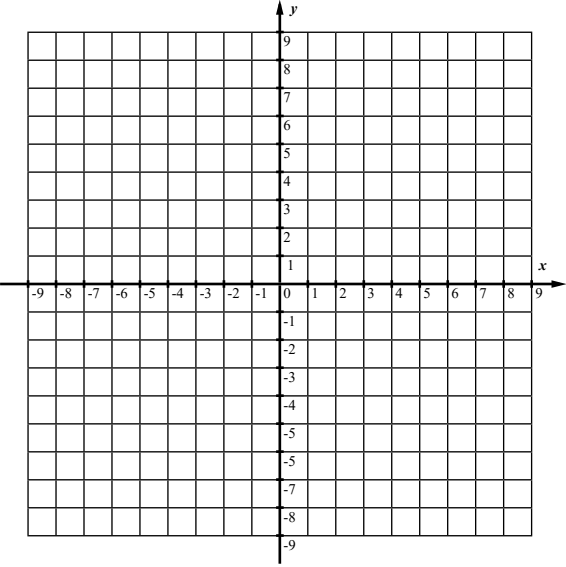
14) $|x - 3| + |y - 4| = 5$;



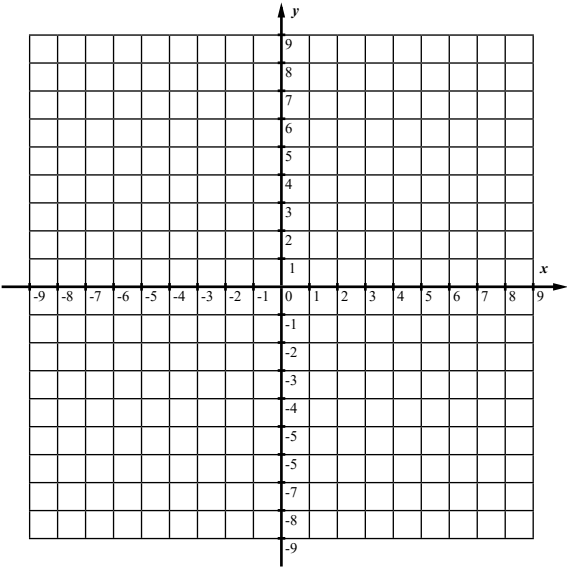
15) $x = (y - 1)^2$;



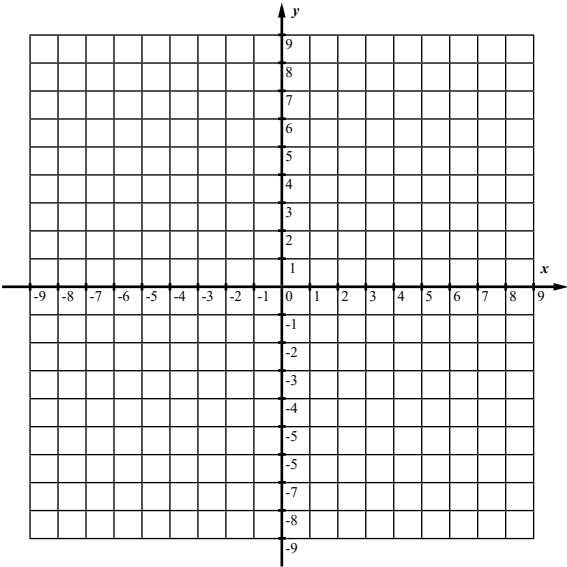
16) $|y - 1| = x^2$;



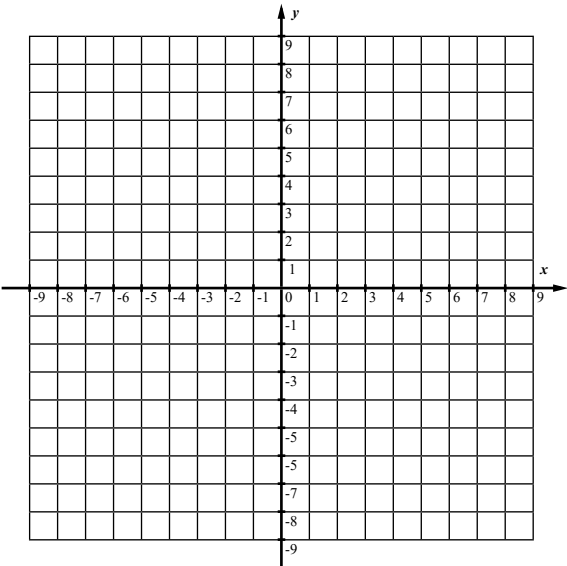
17) $|y-1|=(|x|-1)^2$;



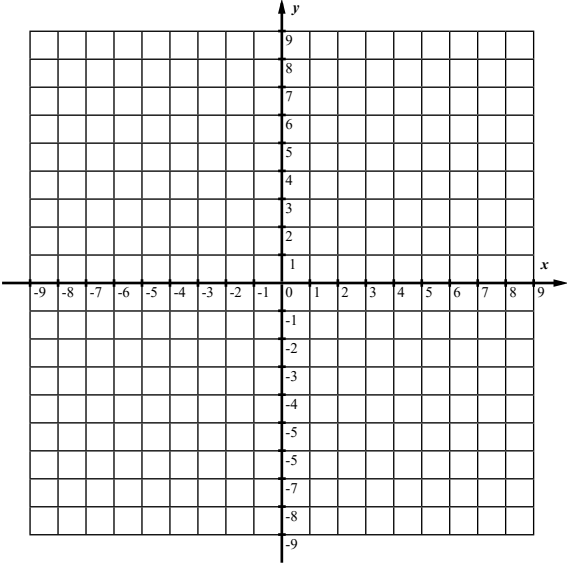
18) $|x|+2=(|y|-1)^2$;



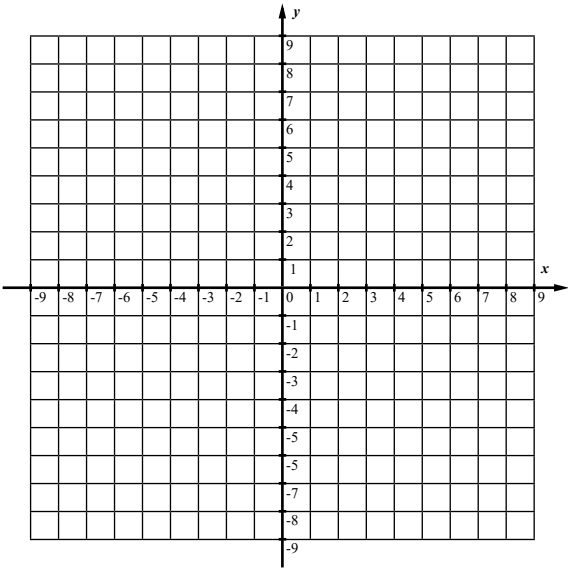
19) $\frac{x^2+y^2-1}{|x|-1}=0$;



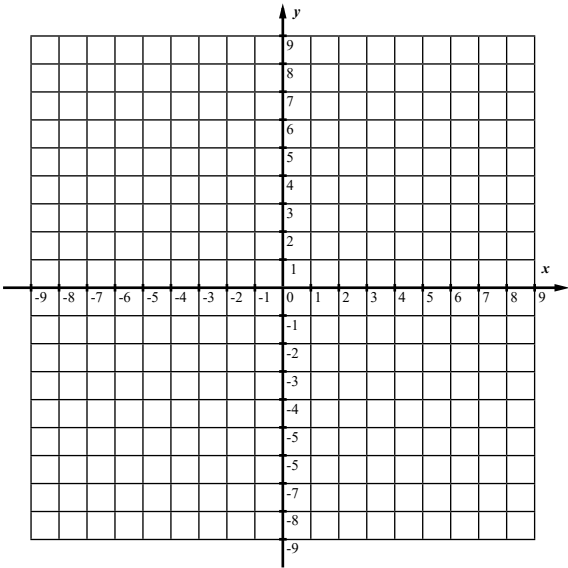
20) $\frac{|x|+|y|-2}{4-x^2-y^2}=0$;



21) $(x^4 + 1)(y^4 + 1) = 4x^2y^2;$



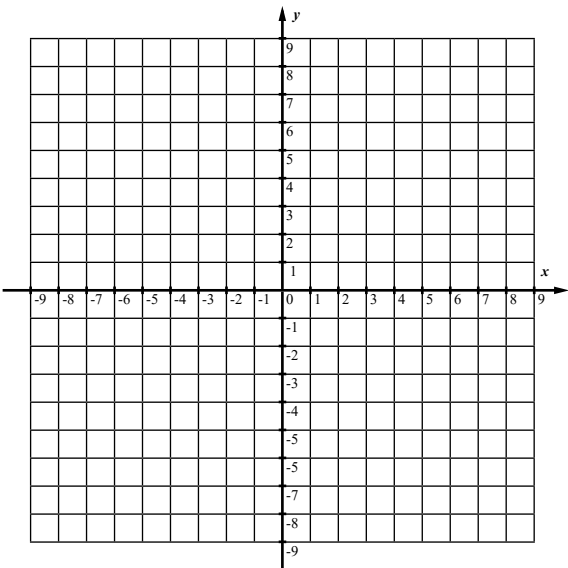
22) $(x^2 - 2x + 2)(y^2 + 4y + 6) = 2.$



Задание 33

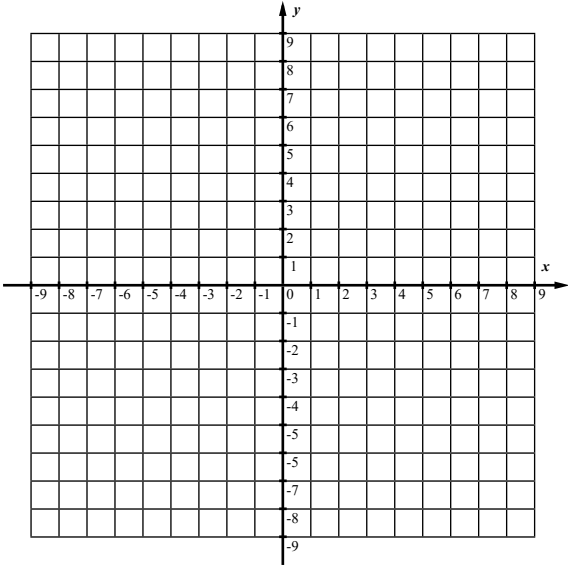
Определите графически количество решений системы уравнений:

1) $\begin{cases} y = (x - 5)^2, \\ xy = 5; \end{cases}$



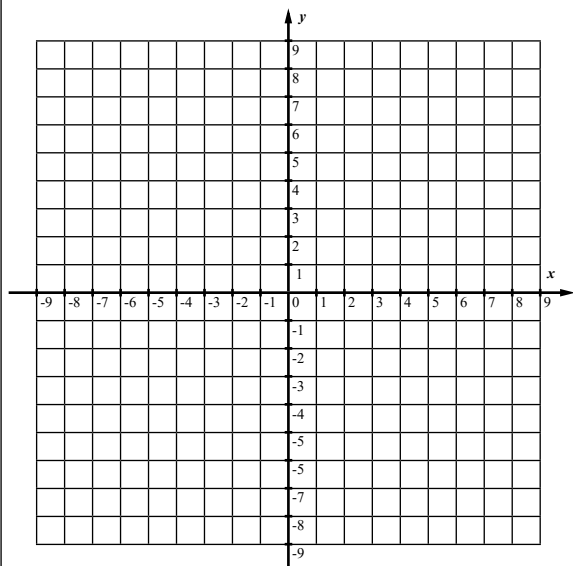
Ответ: _____

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y - x = 3; \end{cases}$



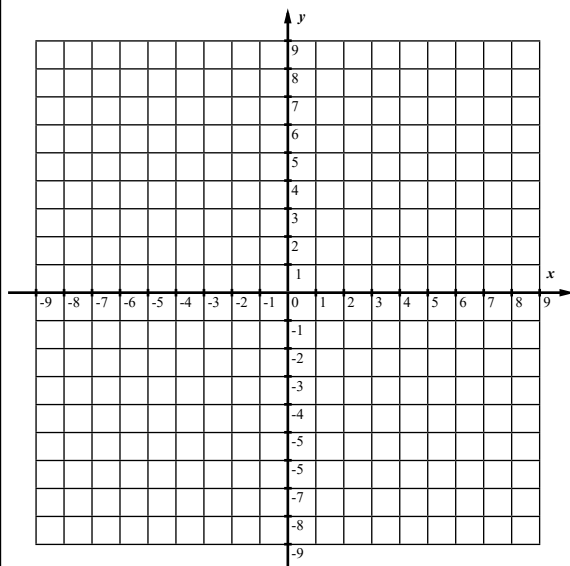
Ответ: _____

$$3) \begin{cases} x^2 + y^2 = 6, \\ xy = 1; \end{cases}$$



Ответ: _____

$$4) \begin{cases} |x+1| + |y| = 1, \\ x + y^2 + 1 = 0. \end{cases}$$

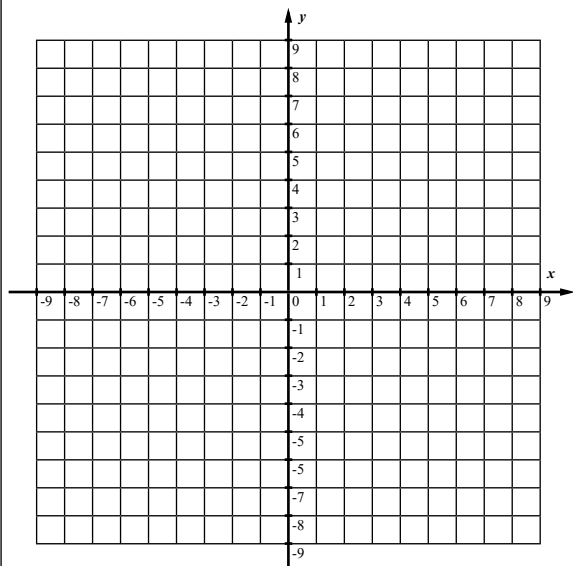


Ответ: _____

Задание 34

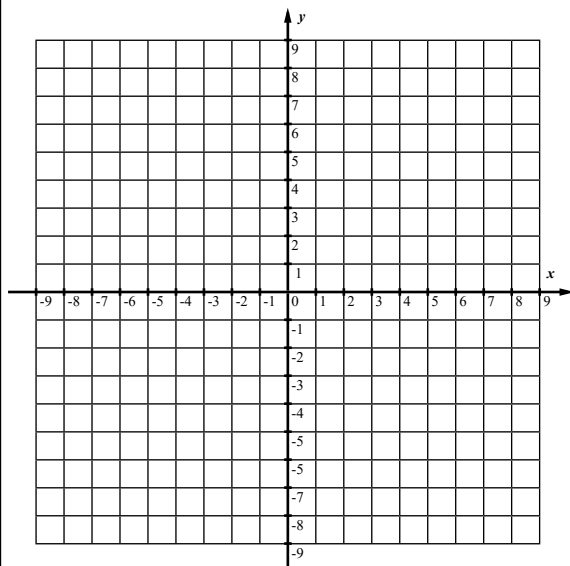
Сколько решений в зависимости от значения параметра a имеет система уравнений:

$$1) \begin{cases} y = |x|, \\ x^2 + y = a; \end{cases}$$



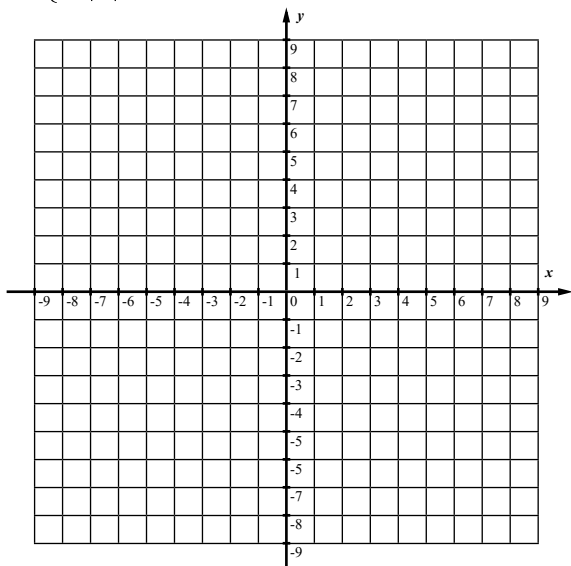
Ответ: _____

$$2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 + a; \end{cases}$$



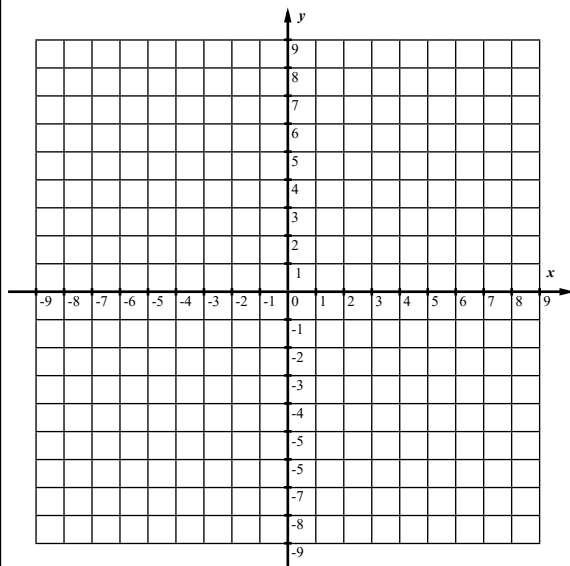
Ответ: _____

$$3) \begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ |y| = 1; \end{cases}$$



Ответ: _____

$$4) \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = a - |x|? \end{cases}$$



Ответ: _____

Задание 35

Решите систему уравнений:

$$1) \begin{cases} 2x^3 + 3x^2y + 5xy^2 + 2y^3 = 0, \\ 2x^2 - y = 4; \end{cases}$$

Ответ: _____

$$2) \begin{cases} x^4 + y^4 = 146, \\ xy = 5; \end{cases}$$

Ответ: _____

$$3) \begin{cases} 2x^3 - 7x^2y + 7xy^2 - 2y^3 = 0, \\ 4(x - y) = xy; \end{cases}$$

Ответ: _____

$$4) \begin{cases} \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{23}{4}, \\ x - y = 1; \end{cases}$$

Ответ: _____

$$5) \begin{cases} \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \frac{25x}{6y} + \frac{25y}{6x} + 2 = 0, \\ x + 2y = 4; \end{cases}$$

Ответ: _____

$$6) \begin{cases} x^4 + 4x^2y - x^2 + 4y^2 - 2y - 2 = 0, \\ x + y = 3; \end{cases}$$

Ответ: _____

7) $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{3}{2}, \\ x + xy + y = 9; \end{cases}$ Ответ: _____	8) $\begin{cases} x + \sqrt{y} = 6, \\ y + \sqrt{x} = 6; \end{cases}$ Ответ: _____
9) $\begin{cases} x + y + z = 6, \\ x(y + z) = 5, \\ y(x + z) = 8; \end{cases}$ Ответ: _____	10) $\begin{cases} \sqrt{\frac{2x-1}{y+2}} + \sqrt{\frac{y+2}{2x-1}} = 2, \\ x + y = 2; \end{cases}$ Ответ: _____
11) $\begin{cases} x + y - \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{12}{x-y}, \\ x^2 - y = 28; \end{cases}$ Ответ: _____	12) $\begin{cases} 3(x^2 - 3y) - \frac{1}{\sqrt{x+y}} = 5, \\ 2(x^2 - 3y) + \frac{3}{\sqrt{x+y}} = 7; \end{cases}$ Ответ: _____
13) $\begin{cases} x^2 + 3xy = 4, \\ 2x^2 - y^2 = 1; \end{cases}$ Ответ: _____	14) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 17, \\ x^2 - 2xy = -3; \end{cases}$ Ответ: _____
15) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ 2x^2 - 3xy + 2y^2 = 4; \end{cases}$ Ответ: _____	16) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^3 - y^3 = 7; \end{cases}$ Ответ: _____

17) $\begin{cases} x^2 - xy + 2x = 2, \\ y^2 - xy - 2y = 6; \end{cases}$	18) $\begin{cases} \frac{3y-1}{x-1} - \frac{3x+1}{y+1} = 2, \\ \frac{2x-2}{3y-1} + \frac{3y+3}{3x+1} = -1; \end{cases}$
Ответ: _____	Ответ: _____
19) $\begin{cases} y - x^3y = 9, \\ x^2y - x^3y = 12; \end{cases}$	20) $\begin{cases} (x^2 - 3xy + y^2)\sqrt{x+y} = 2, \\ (x^2 + xy + y^2)\sqrt{x+y} = 26. \end{cases}$
Ответ: _____	Ответ: _____

Задание 36

Решите задачу.

1) Сумма кубов цифр двузначного числа равна 243, а произведение суммы его цифр на произведение цифр этого числа равно 162. Найдите квадрат данного двузначного числа.

Ответ: _____

2) Плотность первого металла на 4 г/см³ больше плотности второго металла. Из 6 кг первого металла и 4 кг второго изготовили сплав, деталь из которого имеет массу 0,5 кг. Если бы такая же по объёму деталь была бы изготовлена только из второго металла, то ее масса была бы на 20% меньше. Найдите плотность второго металла.

Ответ: _____

3) В кондитерском цехе происходит соревнование между тремя кондитерами. За определённый период времени первый и третий кондитер изготовили в три раза больше пирожных, чем третий; а первый и третий кондитеры – в два раза больше, чем второй. Какой из кондитеров победил в соревновании по изготовлению пирожных?

Ответ: _____

НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ

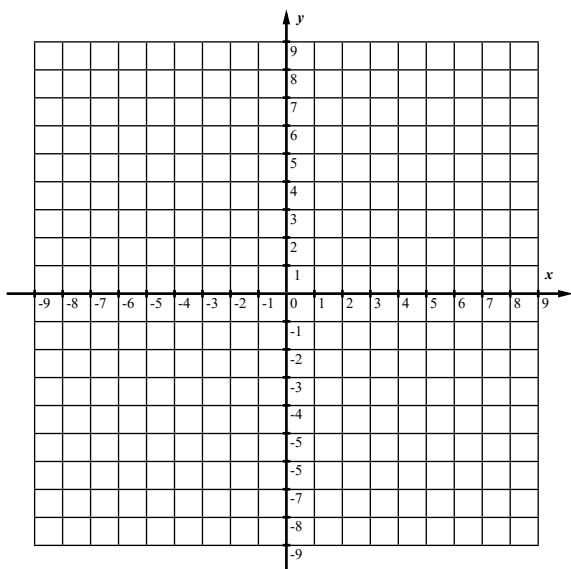
Важно знать:

- ✓ Пару значений переменных, обращающую неравенство с двумя переменными в верное числовое равенство, называют решением неравенства с двумя переменными.
- ✓ Графиком неравенства с двумя переменными называют геометрическую фигуру, состоящую из всех тех и только тех точек координатной плоскости, координаты которых являются решением данного неравенства.
- ✓ Для построения в координатной плоскости фигуры, задаваемой неравенством $F(x; y) < 0$ или $F(x; y) > 0$, строят график уравнения $F(x; y) = 0$ и методом пробной точки определяют, какие из полученных частей плоскости содержат решения неравенства.
- ✓ Чтобы найти множество решений системы неравенств, надо найти пересечение множеств решений неравенств, входящих в систему.

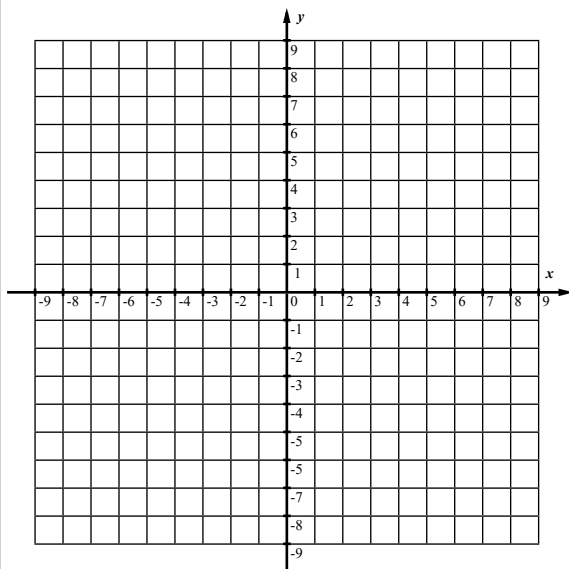
Задание 37

Изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства:

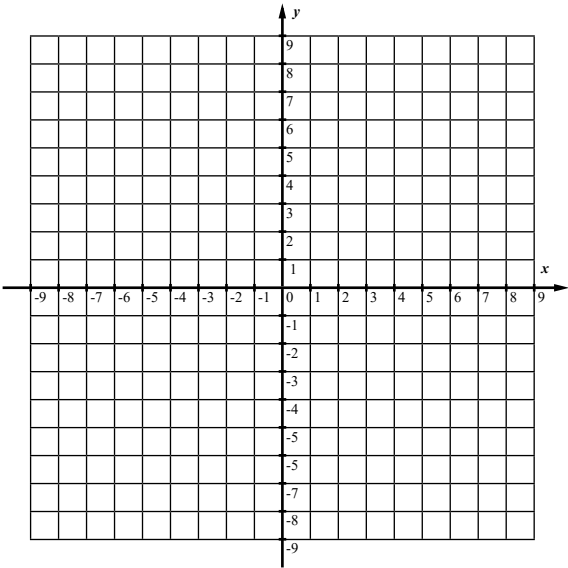
1) $\sqrt{1-x^2-y^2}(x+y) > 0$;



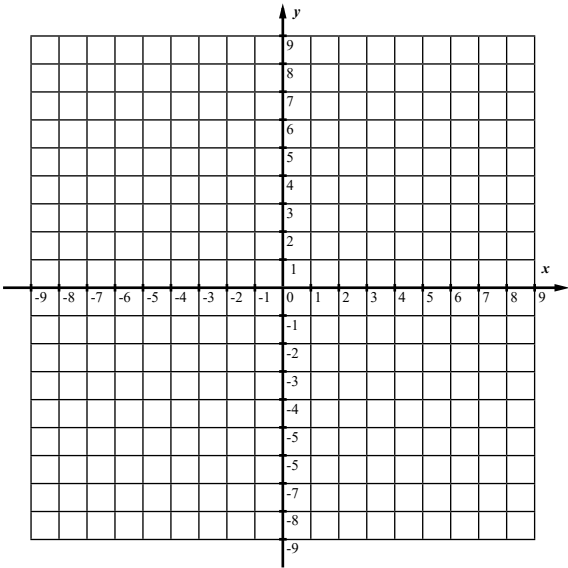
2) $x + y^2 + 2y > 3$;



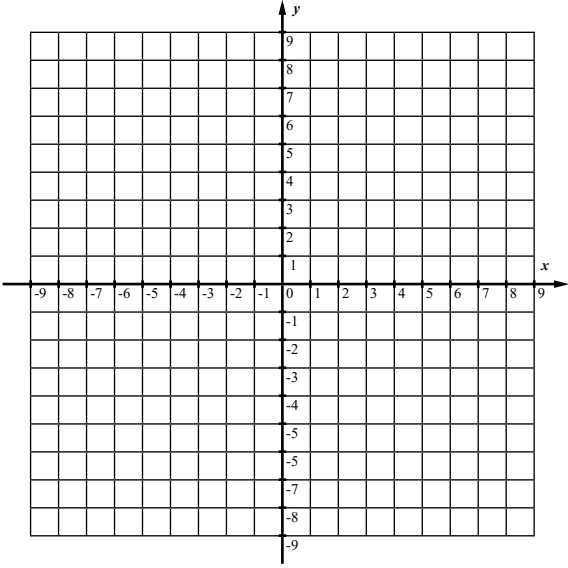
3) $y \leq |2|x| - 1|;$



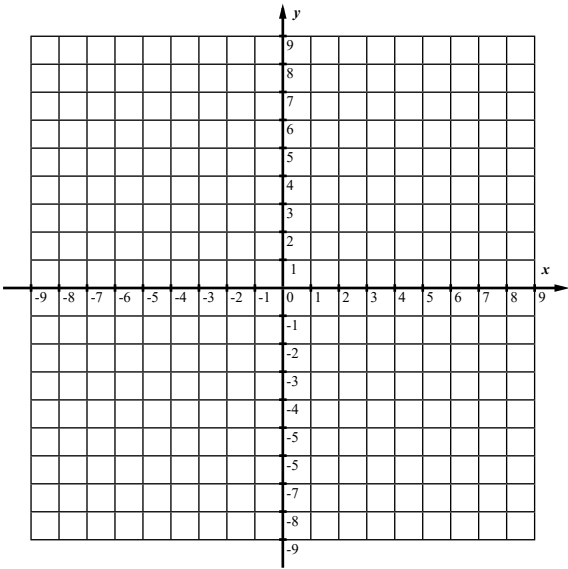
4) $(|x| + y - 1)(x + |y| + 1) \leq 0;$



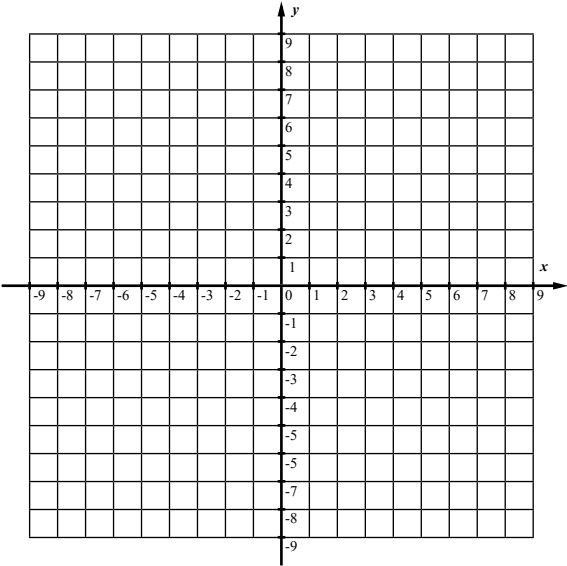
5) $||x| - 1| + |y| \leq 1;$



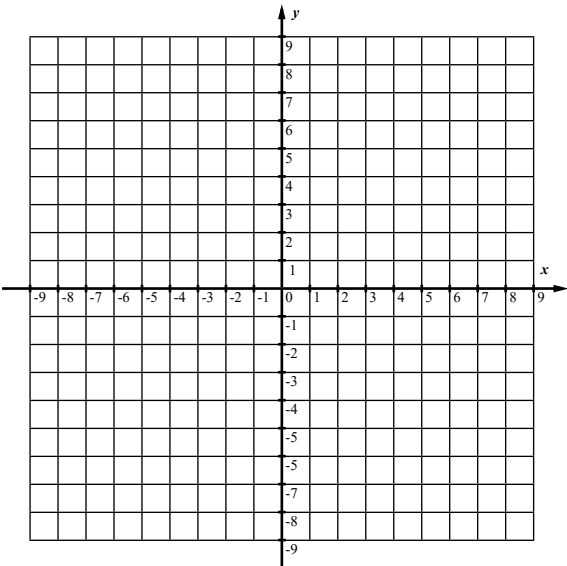
6) $x^2 + y^2 - 4|x| - 4|y| + 4 \leq 0;$



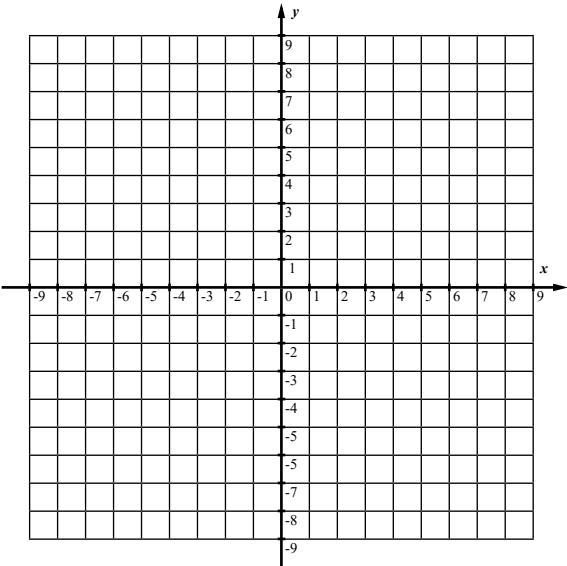
7) $x^2(y - x^2) > 0;$



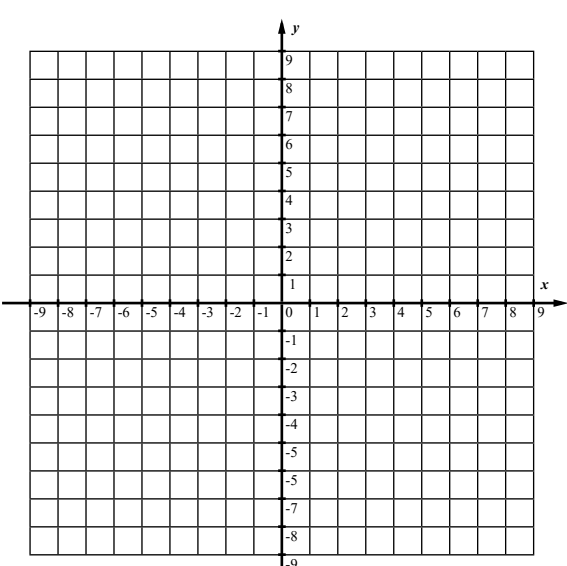
8) $\frac{x^2 + y^2 - 4}{|y|} < 0;$



9) $\frac{x^2 + y^2 - 1}{(x^2 - y^2)^2} > 0;$



10) $\frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}} \leq 0.$

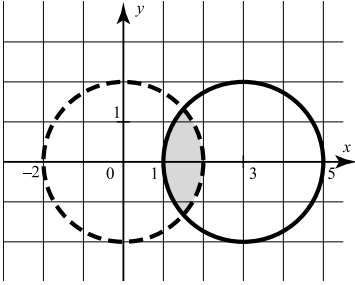
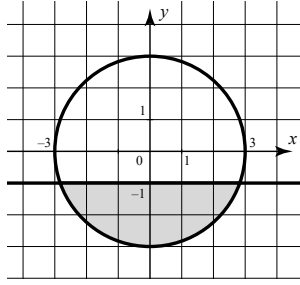
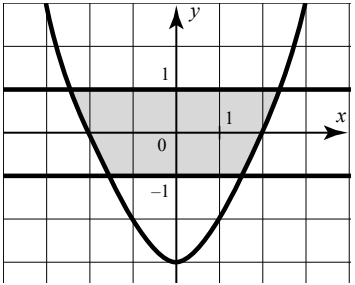
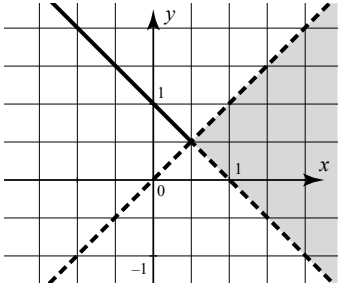
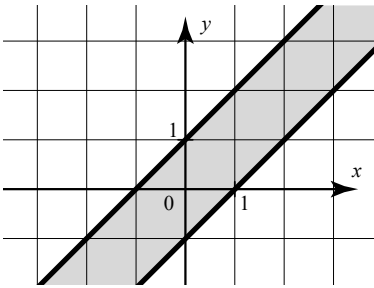
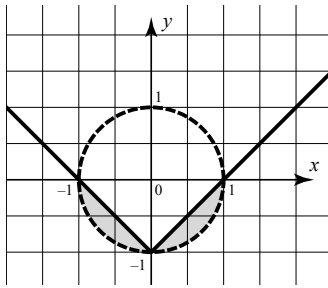


Задание 38

Найдите все значения параметра a , при которых множество решений неравенства $(x^2 - a)(a - 2x - 8) > 0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leq 4$.

Задание 39

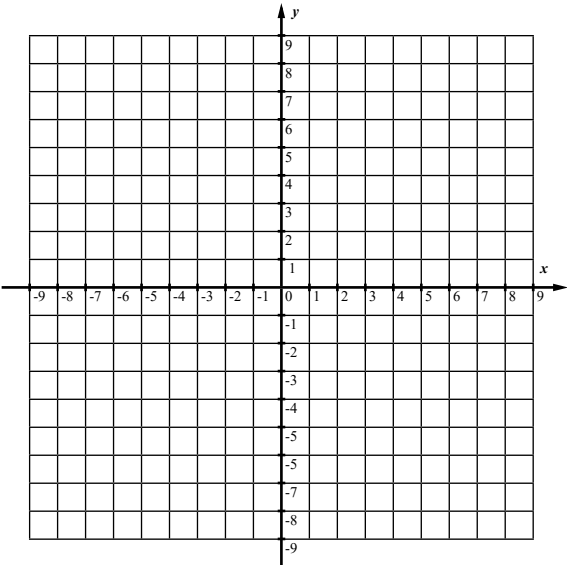
Задайте системой неравенств фигуру, изображённую на рисунке.

1)  Ответ: _____	2)  Ответ: _____
3)  Ответ: _____	4)  Ответ: _____
5)  Ответ: _____	6)  Ответ: _____

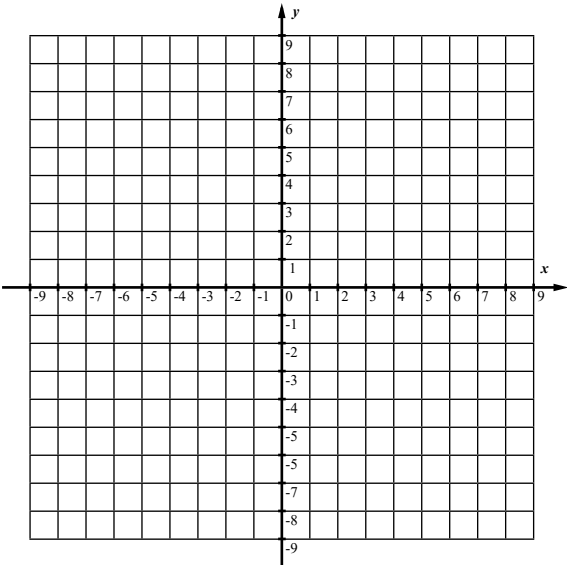
Задание 40

Изобразите график неравенства:

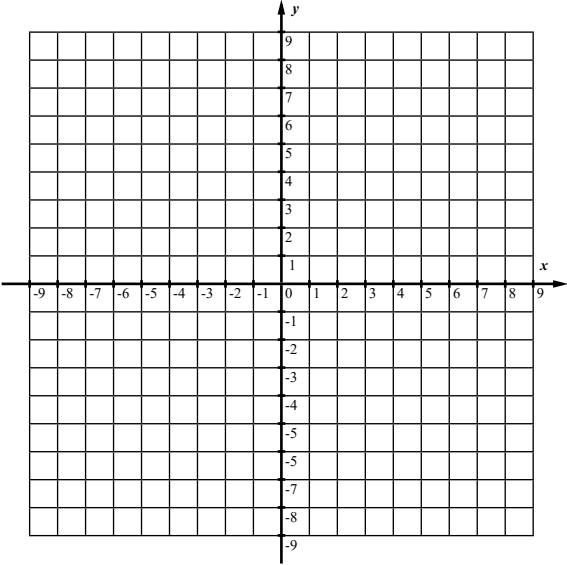
1) $|x - y| \leq 3;$



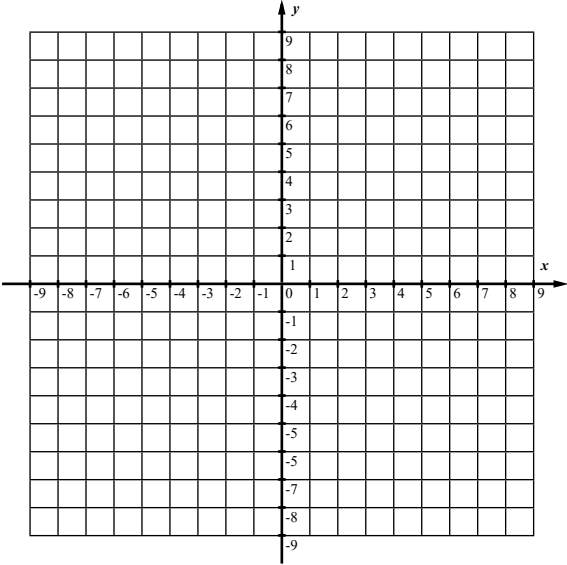
2) $\sqrt{x - y} \leq 2;$



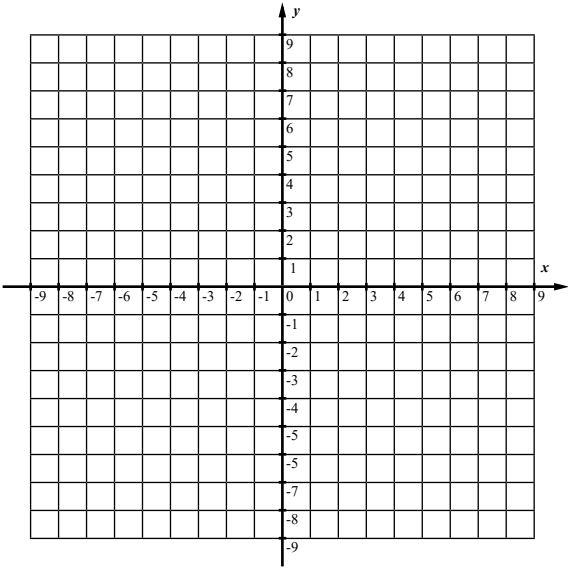
3) $|x + y| \leq x - y;$



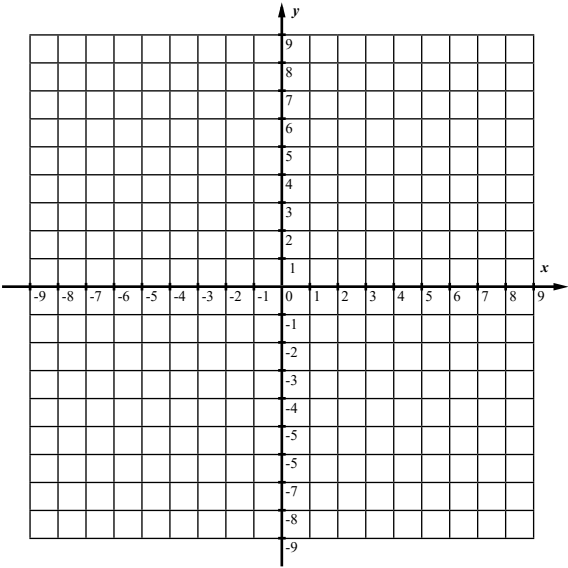
4) $\sqrt{x + y} \leq \sqrt{4x - 2y + 1};$



5) $|x - y| \geq 2x + y + 1$;

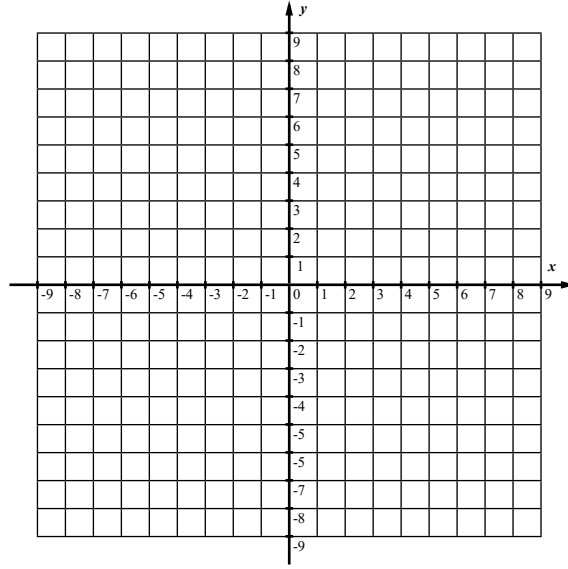


6) $\sqrt{2x + y} \geq \sqrt{x - y + 1}$.

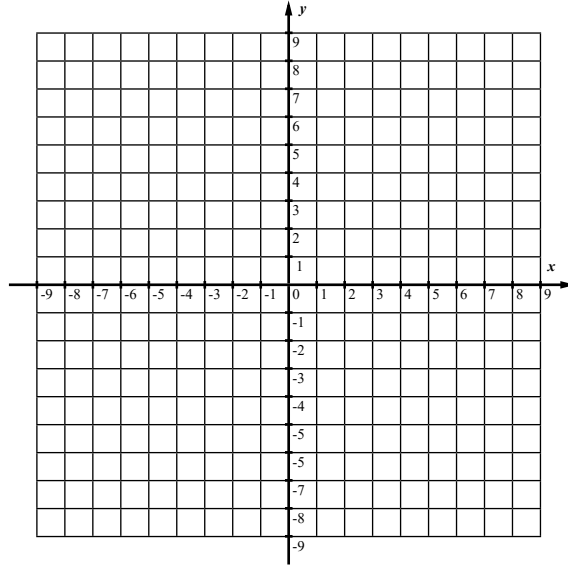


Задание 41
Изобразите график неравенства:

1) $\sqrt{1 - |x|} (y - x^2) \leq 0$;



2) $(y + x + 2) \sqrt{x^2 + y^2 - 2} \leq 0$.



Задание 42

Найдите все значения параметра a , при которых система неравенств $\begin{cases} x^2 + a + 4x + 3 \leq 0, \\ 2a - x + 2 \geq 0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Ответ: _____

Задание 43

При каких значениях параметра a система $\begin{cases} x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 2a < 0, \\ x + a^2 = 0 \end{cases}$ имеет решение?

Ответ: _____

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Важно знать:

- ✓ Числовая последовательность – это функция, определенная на множестве натуральных чисел. Каждому натуральному числу ставится в соответствие действительное число.
- ✓ Способы задания:
 - Аналитический способ. Последовательность задается формулой n -го члена.
 - Рекуррентный способ. Каждый член последовательности, начиная со второго, выражается через предыдущий член.
 - Словесный способ. Последовательность задается описанием.
- ✓ Виды числовых последовательностей:
 - Возрастающая. Последовательность (x_n) называется возрастающей, если каждый её член, начиная со второго, больше предыдущего, т. е. $x_{n+1} > x_n$.
 - Убывающая. Последовательность (x_n) называется убывающей, если каждый её член, начиная со второго, меньше предыдущего, т. е. $x_{n+1} < x_n$.
 - Ограниченная. Последовательность (x_n) называется ограниченной, если существуют два числа m и M , при которых для любого натурального n верно неравенство: $m \leq x_n \leq M$.

Характеристики	Последовательность	
	Арифметическая прогрессия	Геометрическая прогрессия
Определение	Каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d (разность прогрессии) $a_{n+1} = a_n + d$	Каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q (знаменатель прогрессии) $b_{n+1} = b_n \cdot q$
Формула n -го члена	$a_n = a_1 + d(n-1)$	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
Формула суммы n первых членов (через первый член и n -й)	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$	$S_n = \frac{b_n \cdot q - b_1}{q - 1}$
Формула суммы n первых членов (через первый член и разность или знаменатель)	$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$	$S_n = \frac{b_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}$
Характеристическое свойство	$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$	$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$
	$a_p + a_m = a_k + a_q$, где $p + m = k + q$	$b_p \cdot b_m = b_k \cdot b_q$, где $p + m = k + q$
Сумма бесконечной геометрической прогрессии	–	$S = \frac{b_1}{1 - q}, q < 1$

Задание 44

Между числами 2 и 46 вставьте несколько чисел, которые вместе с данными числами образуют арифметическую прогрессию, если известно, что сумма первого, второго и последнего из вставленных чисел равна 58.

Ответ: _____

Задание 45

В арифметической прогрессии семнадцатый член равен 50, сорок первый равен 122, а сумма первых n членов прогрессии равна 3927. Найдите n .

Ответ: _____

Задание 46

Найдите все значения x , при которых числа $4x^2$, $-5x+8$, $6x^2-44$ являются последовательными членами арифметической прогрессии (в указанном порядке).

Ответ: _____

Задание 47

Дана арифметическая прогрессия $\{a_n\}$.

Найдите $a_3 + a_{12} + a_{13} + a_{22}$, если $a_5 + a_{20} = 52$.

Ответ: _____

Задание 48

Найдите сумму всех членов арифметической прогрессии $-2; 4 \dots$ с шестого по тридцатый включительно.

Ответ: _____

Задание 49

Найдите разность четырнадцатого и одиннадцатого членов возрастающей геометрической прогрессии, если их сумма равна 18, а произведение третьего и двадцать второго членов этой прогрессии равно 77.

Ответ: _____

Задание 50

Найдите x , если известно, что числа $x - 3$, $\sqrt{14 - 6x}$, $x - 4$ являются последовательными членами геометрической прогрессии (в указанном порядке).

Ответ: _____

Задание 51

Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если разность её семнадцатого и четырнадцатого членов в 12 раз больше суммы тринадцатого, четырнадцатого и пятнадцатого членов.

Ответ: _____

Задание 52

Если одиннадцатый член геометрической прогрессии увеличить в 10 раз и сложить с тринадцатым членом, то получится число, в 7 раз большее её двенадцатого члена. Найдите знаменатель прогрессии.

Ответ: _____

Задание 53

Найдите знаменатель геометрической прогрессии, отношение суммы первых четырёх членов которой к сумме первых двух членов равно $\frac{26}{25}$.

Ответ: _____

Задание 54

Найдите значение параметра p , если известно, что корни уравнения $x^3 + 3x^2 + px + 15 = 0$ образуют возрастающую арифметическую прогрессию.

Ответ: _____

СТЕПЕНИ И КОРНИ

Важно знать:

- ✓ Арифметическим корнем n -ой степени из числа a называется такое неотрицательное число b , n -ая степень которого равна a .
- ✓ Для любых $a \geq 0, b \geq 0$ $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$.
- ✓ Для любых $a \geq 0, b > 0$ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.
- ✓ Для любых $a \geq 0, m, n \in \mathbb{N}$ $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.
- ✓ Для любых $a \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}$ $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a; \sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|$.
- ✓ Если $a > 0, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$, то $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.
- ✓ Если $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$, то $0^{\frac{m}{n}} = 0$.
- ✓ Свойства степени с целым показателем выполняются для степени с любым рациональным показателем.

$$\checkmark \sqrt[2k]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^{2k}(x); \end{cases}$$

$$\checkmark \sqrt[2k+1]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^{2k+1}(x);$$

$$\checkmark \sqrt[2k]{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ f(x) \leq g^{2k}(x); \end{cases}$$

$$\checkmark \sqrt[2k]{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq g^{2k}(x); \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Задание 55

Проверьте равенство:

1) $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}} = \sqrt{9+4\sqrt{5}};$	2) $\sqrt[3]{9\sqrt{3}+11\sqrt{2}} = \sqrt{5+2\sqrt{6}};$
Ответ: _____	Ответ: _____
3) $\sqrt[3]{\frac{5\sqrt{2}-7}{5\sqrt{2}+7}} = (\sqrt{2}-1)^2;$	4) $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{20+12\sqrt{3}}}.$
Ответ: _____	Ответ: _____

Задание 56

Вычислите:

1) $\sqrt[3]{-125} + \frac{1}{8}\sqrt[6]{64}$;	2) $\sqrt[5]{32} - 0,5\sqrt[3]{-216}$;	3) $-\frac{1}{3}\sqrt[4]{81} + \sqrt[4]{625}$;
Ответ: _____	Ответ: _____	Ответ: _____
3) $\sqrt[3]{-1000} - \frac{1}{4}\sqrt[4]{256}$;	5) $\sqrt[5]{\frac{1}{243}} + \sqrt[3]{-0,001} - \sqrt[4]{0,0016}$.	
Ответ: _____	Ответ: _____	

Задание 57

Вычислите:

1) $\sqrt[4]{324} : \sqrt[4]{4}$;	2) $\sqrt[3]{128} : \sqrt[3]{2000}$;
Ответ: _____	Ответ: _____
3) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$;	4) $\frac{\sqrt[5]{256}}{\sqrt[5]{8}}$;
Ответ: _____	Ответ: _____
5) $(\sqrt{125} - \sqrt{45}) : \sqrt{5}$;	6) $(\sqrt[3]{625} - \sqrt[3]{5}) : \sqrt[3]{5}$.
Ответ: _____	Ответ: _____

Задание 58

Вычислите:

1) $\frac{\sqrt[3]{49} \cdot \sqrt[3]{112}}{\sqrt[3]{250}};$	2) $\frac{\sqrt[4]{54} \cdot \sqrt[4]{120}}{\sqrt[4]{5}};$
Ответ: _____	Ответ: _____
3) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}} + \sqrt[6]{27^2} - \sqrt{\sqrt[3]{64}};$	4) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} + \sqrt[4]{18} \cdot \sqrt[4]{4\frac{1}{2}} - \sqrt{\sqrt{256}};$
Ответ: _____	Ответ: _____
5) $\sqrt[3]{11-\sqrt{57}} \cdot \sqrt[3]{11+\sqrt{57}};$	6) $\sqrt[4]{17-\sqrt{33}} \cdot \sqrt[4]{17+\sqrt{33}}.$
Ответ: _____	Ответ: _____

Задание 59

Упростите выражение (буквами обозначены положительные числа):

1) $\sqrt[3]{2ab^2} \cdot \sqrt[3]{4a^2b};$	2) $\sqrt[4]{3a^2b^3} \cdot \sqrt[4]{27a^2b};$
Ответ: _____	Ответ: _____
3) $\sqrt[4]{\frac{ab}{c}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a^3c}{b}};$	4) $\sqrt[3]{\frac{16a}{b^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2ab}}.$
Ответ: _____	Ответ: _____

Задание 60

Вычислите:

1) $\sqrt[3]{-2} \cdot \sqrt[6]{16} - \sqrt[4]{5\frac{1}{16}};$	2) $\frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{32}} - \sqrt[3]{0,25};$
Ответ: _____	Ответ: _____
3) $(\sqrt[4]{162} : \sqrt[3]{3} : \sqrt[4]{2} + 2\sqrt[3]{9}) : \sqrt[9]{729};$	4) $(\sqrt[4]{24} + \sqrt[4]{6})^2 : (4\sqrt{3} + 3\sqrt{6});$
Ответ: _____	Ответ: _____
5) $(\sqrt{3} - 2) \cdot \sqrt[3]{15\sqrt{3} + 26};$	6) $\sqrt[6]{7 + 4\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}};$
Ответ: _____	Ответ: _____
7) $\left(\frac{2\sqrt[3]{2} \cdot (1 + \sqrt[3]{4})}{\sqrt[3]{4} - 1} + \frac{1}{\sqrt[3]{2} + 1} \right) \cdot (\sqrt[3]{2} - 1);$	8) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{15} - 2\sqrt[4]{45}}{(\sqrt{3} - \sqrt[4]{45})^2}.$
Ответ: _____	Ответ: _____

Задание 61

Решите уравнение:

1) $x^{14} = 24 + 5x^7;$	2) $x^{16} = 12 + 4x^8;$
Ответ: _____	Ответ: _____

3) $\sqrt[4]{x-1}=2+\sqrt[8]{x-1};$	4) $\sqrt[3]{2x-1}=3+2 \cdot \sqrt[12]{4x^2-4x+1};$
Ответ: _____	Ответ: _____
5) $\frac{x \cdot \sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4;$	6) $(x+1) \cdot \sqrt[4]{\frac{x-2}{(x+1)^3}}+(x-2) \cdot \sqrt[4]{\frac{x+1}{(x-2)^3}}+4\sqrt[4]{x^2-x-2}=6.$
Ответ: _____	Ответ: _____

Задание 62

Найдите значение выражения:

1) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}};$	2) $(0,04)^{-1,5}-(0,125)^{-\frac{2}{3}};$
Ответ: _____	Ответ: _____
3) $8^{\frac{9}{7}}:8^{\frac{2}{7}}-3^{\frac{6}{5}} \cdot 3^{\frac{4}{5}};$	4) $\left(5^{\frac{2}{5}}\right)^{-5}+\left((0,2)^{\frac{3}{4}}\right)^{-4};$
Ответ: _____	Ответ: _____
5) $\frac{3}{4}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-1};$	6) $\left(\frac{1}{27} \cdot 125^{-1}\right)^{-\frac{1}{3}};$
Ответ: _____	Ответ: _____

7) $27^{\frac{2}{3}} + 9^{-1}$;	8) $(0,01)^{-2} : 100^{\frac{1}{2}}$;
Ответ: _____	Ответ: _____
9) $\left(\frac{64}{81}\right)^{\frac{1}{2}}$;	10) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} : \left(\frac{3}{4}\right)^2$;
Ответ: _____	Ответ: _____
11) $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}$;	12) $27^{\frac{2}{3}} - (-2)^{-2} + \left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$;
Ответ: _____	Ответ: _____
13) $(0,001)^{-\frac{1}{3}} - 2^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} - 8^{-1\frac{1}{3}}$;	14) $(-0,5)^{-4} - 625^{0,25} - \left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}}$.
Ответ: _____	Ответ: _____

Задание 63

Упростите выражение:

$$1) \left(\frac{0,5 \cdot a^{\frac{1}{4}}}{(2-a)^{\frac{3}{4}}} + \frac{(2-a)^{\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{-3}{4}}}{2} \right) : (2a-a^2)^{\frac{1}{4}} \cdot a;$$

Ответ: _____

$$2) \frac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}} - \frac{a \cdot b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}} + \frac{2a^2-4ab}{a-b};$$

Ответ: _____

$$3) \frac{\left(a^{\frac{5}{9}} \cdot b^{\frac{1}{9}} - a^{\frac{2}{9}} \cdot b^{\frac{2}{9}} \right)^3 + 3 \cdot \left(a^{\frac{4}{3}} - (a^3 b)^{\frac{1}{3}} \right)}{\left(\sqrt[3]{a^{-1}} + \sqrt[3]{b^{-1}} \right) \cdot \left(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)} - \frac{(a-b)^2}{2 \cdot (a+b)} + \frac{a+b}{2};$$

Ответ: _____

$$4) \left(x + a^{\frac{3}{2}} : \sqrt{x} \right)^{\frac{1}{5}} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{a}{x}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} \right)^{\frac{1}{5}} \cdot (x-a)^{0,3};$$

Ответ: _____

$$5) a^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2a^2 - 16a^{-1}}{a^{1,5} + 2a^{0,5} + 4a^{-0,5}} \right)^{-1} - \frac{1}{a-3+2a^{-1}}.$$

Ответ: _____

Задание 64

Решите уравнение:

1) $\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3};$	2) $\left(x^{\frac{8}{3}} - 2x^2\right)^{\frac{1}{3}} - 2\left(x^{\frac{2}{3}} - 2\right)^{\frac{1}{3}} = 81^{\frac{1}{3}};$
Ответ: _____	Ответ: _____
3) $\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{\frac{1}{3}} + 2 \cdot \left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{-\frac{1}{3}} = 3;$	4) $x^{-1} \cdot (x+1)^{\frac{1}{4}} + (x+1)^{\frac{1}{4}} = 32 \cdot x^{\frac{1}{4}};$
Ответ: _____	Ответ: _____
5) $(1-x)^{-1,5} = (x^4 - 7x^2 - x + 7)^{-1,5};$	6) $\left(\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+3}} - 1\right)^{\frac{2}{3}} = \left(10 \cdot \sqrt[3]{\frac{x+3}{x-2}} - 1\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}.$
Ответ: _____	Ответ: _____

Задание 65

Решите уравнение:

1) $\sqrt[3]{2x^2 - x^3} + x = 1;$	2) $\sqrt{\frac{4}{x^2 + x - 2}} + 3 = \frac{8}{x^2 + x - 2};$
Ответ: _____	Ответ: _____
3) $\sqrt[9]{x^2 - 3x - 1} + \sqrt[9]{2x^2 + 4x} = 0;$	4) $\sqrt[8]{x^2 - 3x - 5} = \sqrt[8]{x+1};$
Ответ: _____	Ответ: _____

$$5) (x+2) \cdot \sqrt[4]{\frac{x-3}{(x+2)^3}} + 1 = 0;$$

ОТВЕТ:

6) $\sqrt[8]{x^8 - 2x^4 - 3x^2 + 1} + x = 0;$

Ответ:

$$7) \sqrt{3x+4}(9x^2+21x+10)=0;$$

Ответ:

8) $(x+1)\sqrt{x^2-3x-6}=2x+2;$

Ответ:

9) $\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}} + \sqrt{11+x-6\sqrt{x+2}} = 1;$

Ответ:

10) $\sqrt{4x+2}\sqrt{3x^2+4}=x+2.$

Ответ:

Задание 66

Решите неравенство:

$$1) \sqrt{x^2 - 5x + 2} > \sqrt{x^2 + 4x + 5};$$

ОТВЕТ:

$$2) \sqrt{x^2 - 5x + 2} > \sqrt{x^2 + 4x + 4};$$

Ответ:

3) $\sqrt{x^2 - 5x + 2} > \sqrt{x^2 + 4x + 3};$

Ответ:

4) $\sqrt{x^2+5x+2} > \sqrt{-x^2-4x-4}$.

Ответ:

Задание 67

Решите неравенство:

1) $(5 - 4x - x^2)\sqrt{-3 - x} \leq 0;$	2) $\sqrt[12]{9x^2 - 6x + 1} + \sqrt[3]{3x - 1} \leq 6;$
Ответ: _____	Ответ: _____
3) $\sqrt{2x + 3} \leq x;$	4) $\sqrt{6 + x - x^2} > 1 - x;$
Ответ: _____	Ответ: _____
5) $\frac{\sqrt[8]{12 + x - x^2}}{x - 1} \geq \frac{\sqrt[8]{12 + x - x^2}}{x + 2};$	6) $\left \sqrt[3]{1 - x} - \sqrt[6]{1 - x} - 4 \right \geq 2.$
Ответ: _____	Ответ: _____

Задание 68

1) При каких значениях параметра a неравенство $\sqrt[4]{2x-a-1} < \sqrt[4]{2a-x-3}$ не имеет решений?

Ответ: _____

2) При каких значениях параметра a неравенство $\sqrt[10]{(x+1)^4} \leq \sqrt[5]{4-a(x+3)}$ выполняется на отрезке $[-2; 3]$?

Ответ: _____

ВАРИАНТЫ ДЛЯ ИТОГОВОГО ПОВТОРЕНИЯ

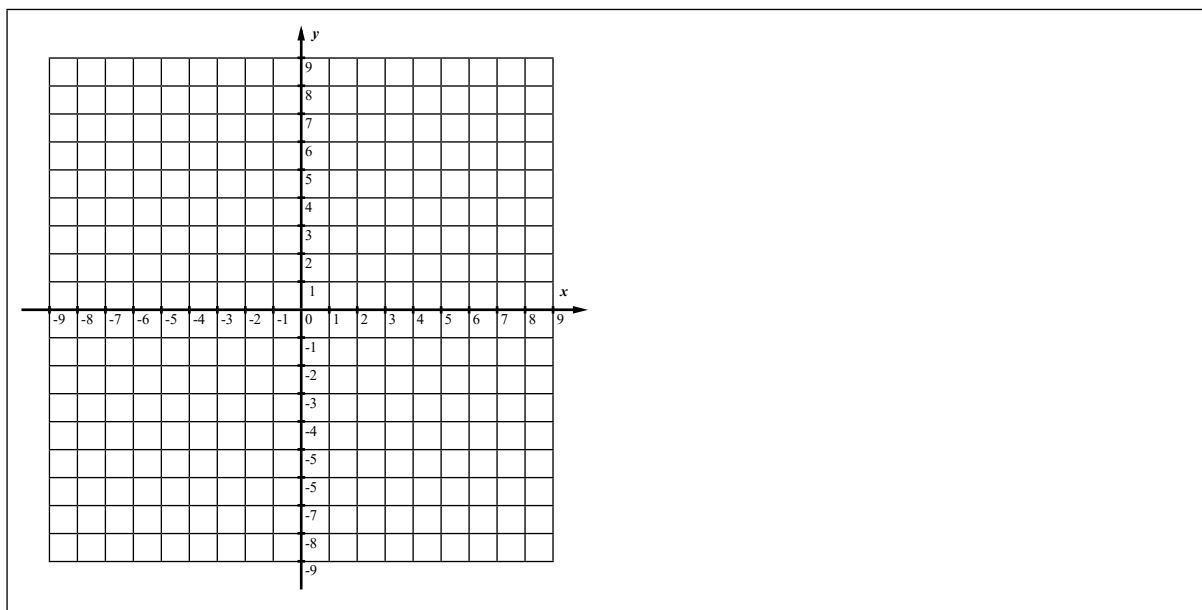
ВАРИАНТ 1

1. Вычислите: $\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2} + \frac{2\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} \right) \cdot (2\sqrt{5}+15).$

2. Если к четырём последовательным членам арифметической прогрессии прибавить соответственно 7, 1, -3 , -6 , то полученные числа будут первыми четырьмя членами бесконечной геометрической прогрессии. Найдите её сумму.

3. Решите уравнение: $2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x - 1)^2 = 13(x^3 - 1).$

4. Постройте график функции: $y = \frac{\frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1}}{\frac{2}{x^2-1}}$.



5. Лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась обратно, затратив на обратный путь на 4 часа меньше, чем на путь в пункт назначения. Какова скорость течения реки в км/ч, если собственная скорость лодки 9 км/ч?

6. При каких значениях параметра a система уравнений $\begin{cases} ax - y = 7, \\ 16x - ay = 28 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

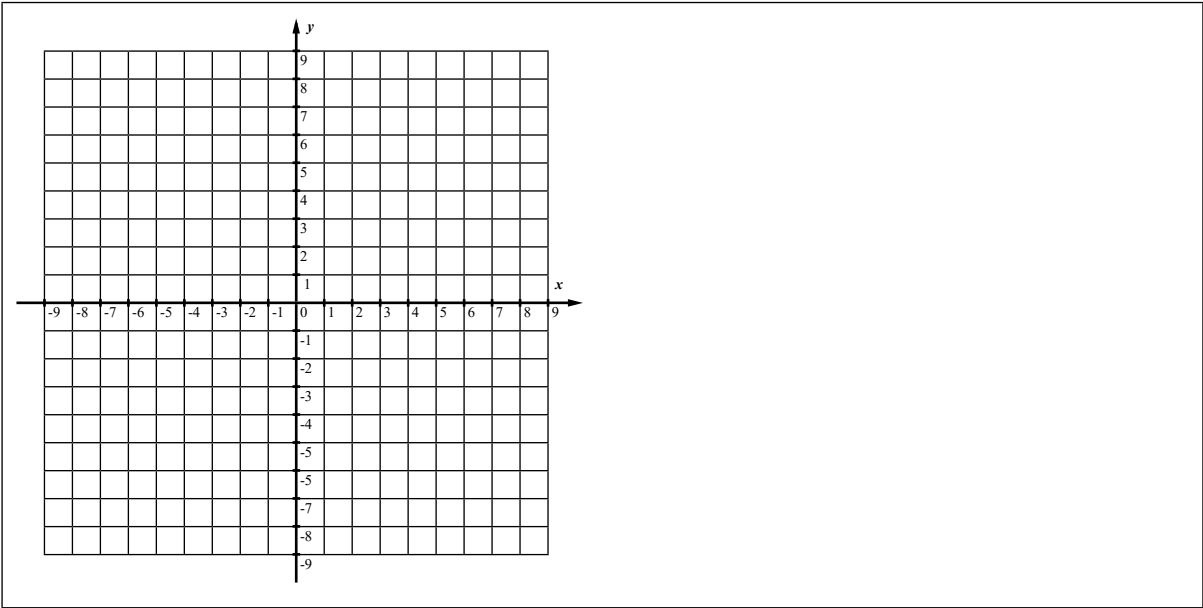
ВАРИАНТ 2

1. Вычислите: $\frac{67,5^3 - 42,5^3}{25} + 67,5 \cdot 42,5$.

2. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 7x^2 + 3xy + 8y^2 = 6, \\ x^2 + xy + y^2 = 1. \end{cases}$$

3. Решите уравнение: $(12x - 1)(6x - 1)(4x - 1)(3x - 1) = 5$.

4. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых $(x; y)$ удовлетворяют равенству $\sqrt{(x-5)(y+8)} = \sqrt{5-x} \cdot \sqrt{-y-8}$.



5. Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 24 км, одновременно отправились велосипедист и пешеход. Велосипедист достиг пункта назначения на 4 часа раньше, чем это сделал пешеход. Если бы велосипедист ехал со скоростью, меньшей на 4 км/ч, то на проделанный путь от А до В он затратил бы вдвое меньше времени, чем пешеход. Найдите скорость велосипедиста.

6. При каких значениях параметра a неравенство $2 > |x+a| + x^2$ имеет хотя бы одно положительное решение?

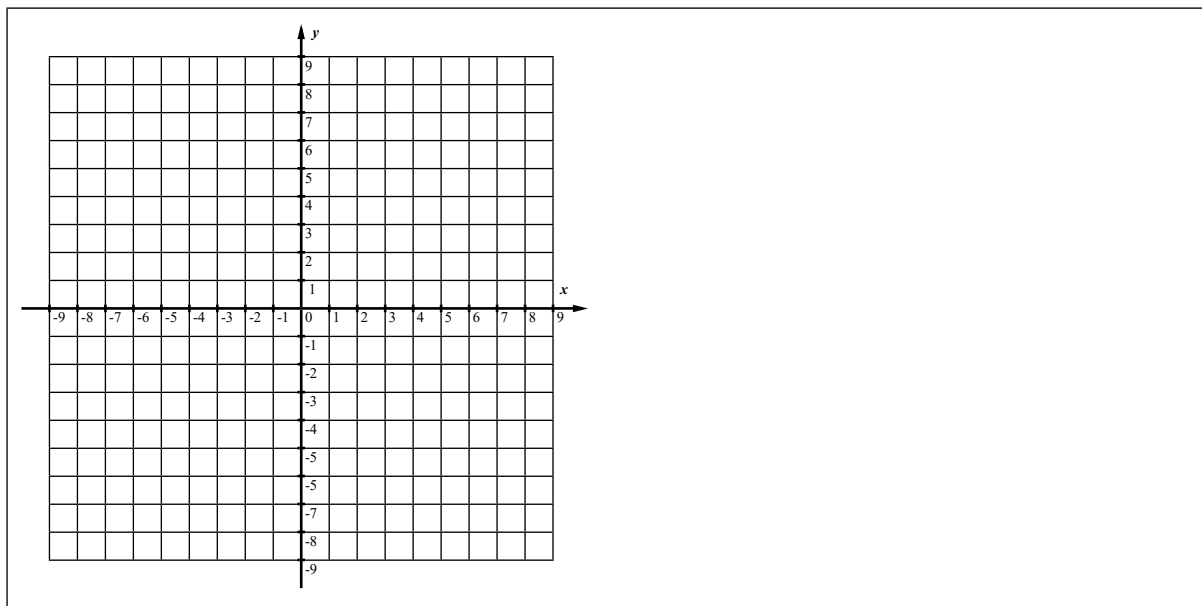
ВАРИАНТ 3

1. Вычислите: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{6+\sqrt{35}} \cdot \frac{\sqrt{125}-\sqrt{343}}{12+\sqrt{35}}$.

2. Сумма квадратов членов бесконечной геометрической прогрессии в три раза больше суммы её членов и в 3,6 раза меньше суммы четвёртых степеней её членов. Найдите второй член прогрессии.

3. Найдите область определения функции: $y = \frac{5}{\sqrt{4x-12}} - \frac{7}{|x|-4}$.

4. Постройте график уравнения: $\frac{(y^2 - 9)(y - x)}{x^2 - 4} = 0$.



5. Заказ на изготовление 180 пирожных первый кондитер выполняет на 3 часа быстрее, чем второй. Сколько пирожных за час делает второй кондитер, если первый за час изготавливает на три пирожных больше?

6. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} x^2 + (5a + 2)x + 4a^2 + 2a < 0, \\ x^2 + a^2 = 4; \end{cases}$ имеет решения?

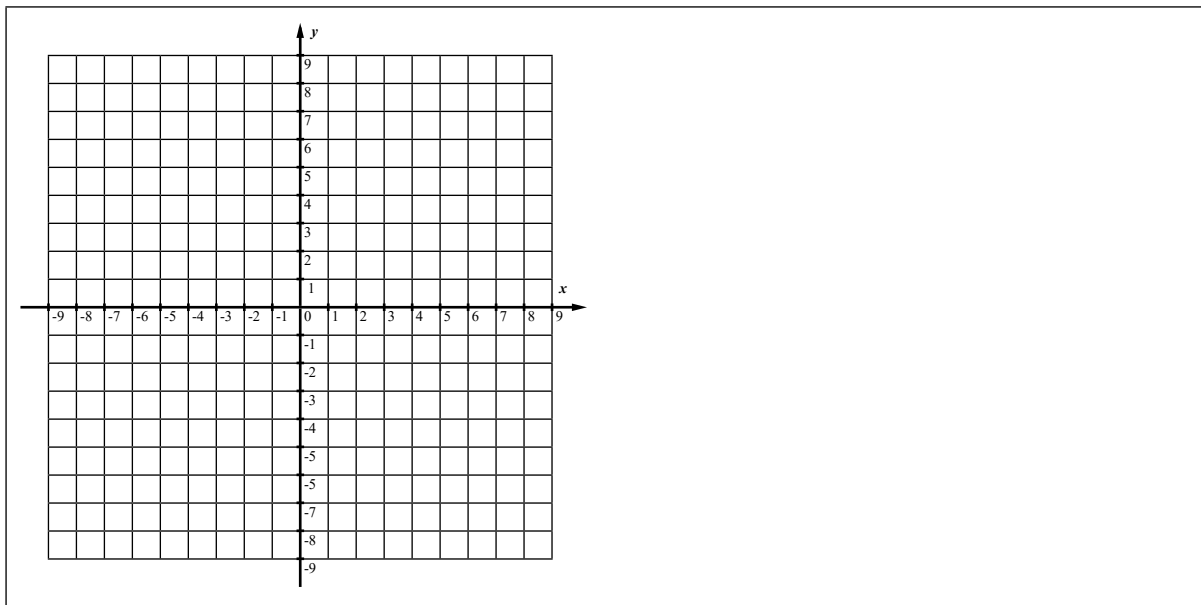
ВАРИАНТ 4

1. Вычислите:
$$\frac{25 \cdot \sqrt{1,3 \cdot 4,7} \cdot \left(\sqrt{\frac{4,7}{1,3}} - \sqrt{\frac{1,3}{4,7}} \right)}{\sqrt{(4,7+1,3)^2 - 4 \cdot 4,7 \cdot 1,3}}.$$

2. Три первых члена геометрической прогрессии являются первым, четвёртым и двадцать пятым членами возрастающей арифметической прогрессии. Найдите эти числа, если их сумма 114.

3. Решите уравнение: $\sqrt{x+7} - 4\sqrt{x+3} + \sqrt{x+3} = 2.$

4. Постройте график функции: $y = \frac{x^4 - x|x|}{x^2}$.



5. Первая и вторая трубы пропускают на 3 л воды в минуту меньше, чем вторая и третья, при этом первая и вторая трубы наполняют резервуар за 18 минут, а вторая и третья за 12 минут. Найдите объём резервуара в литрах.

6. Найдите решение неравенства $\sqrt{x+a}(4x-7) \geq 0$ в зависимости от значений параметра a .

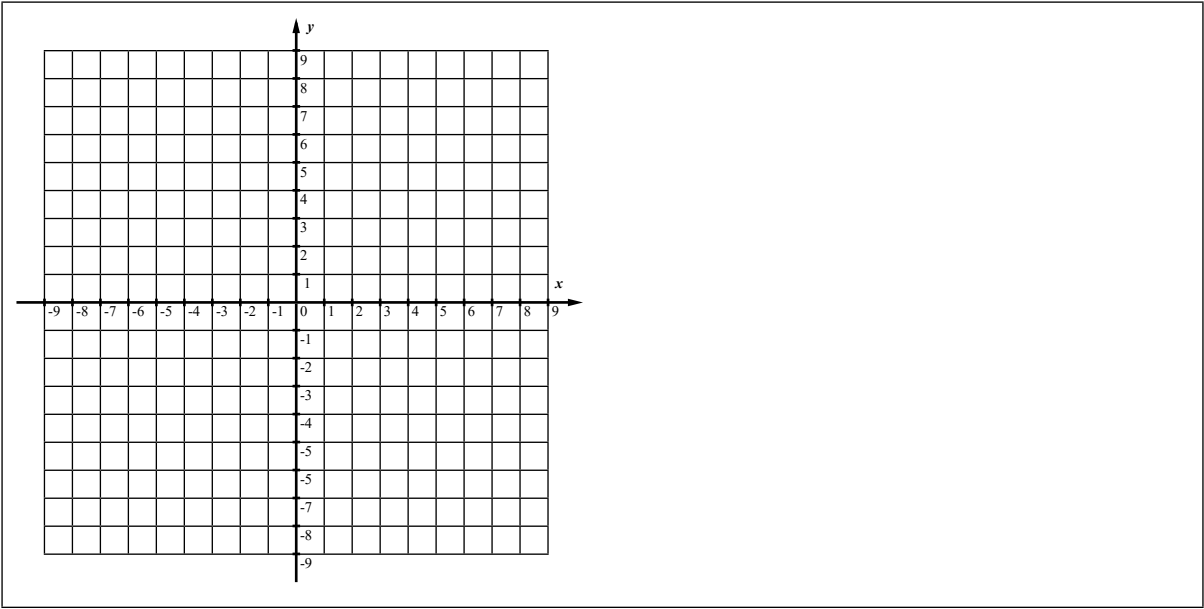
ВАРИАНТ 5

1. Вычислите: $(2\sqrt{3,5} - \sqrt{126} + 3)(3 + \sqrt{56})$.

2. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} 2x - 3y = 0, \\ x^2 + 3xy + 5y^2 = 47. \end{cases}$$

3. Решите уравнение: $(x+1)\sqrt{\frac{x-3}{x+1}} + \sqrt{x^2 - 2x - 3} + 2x + 4 = 0$.

4. Изобразите график неравенства: $\frac{x^2 + y^2 - 9}{|y| - 3} < 0$.



5. Семья состоит из мужа, жены и дочери-студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вчетверо, общий доход семьи вырос бы на 192%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 6%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

6. Найдите все значения параметра a , при которых система неравенств $\begin{cases} x^2 - 4x + a \leq 0, \\ x^2 + 2x - 3a \leq 0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

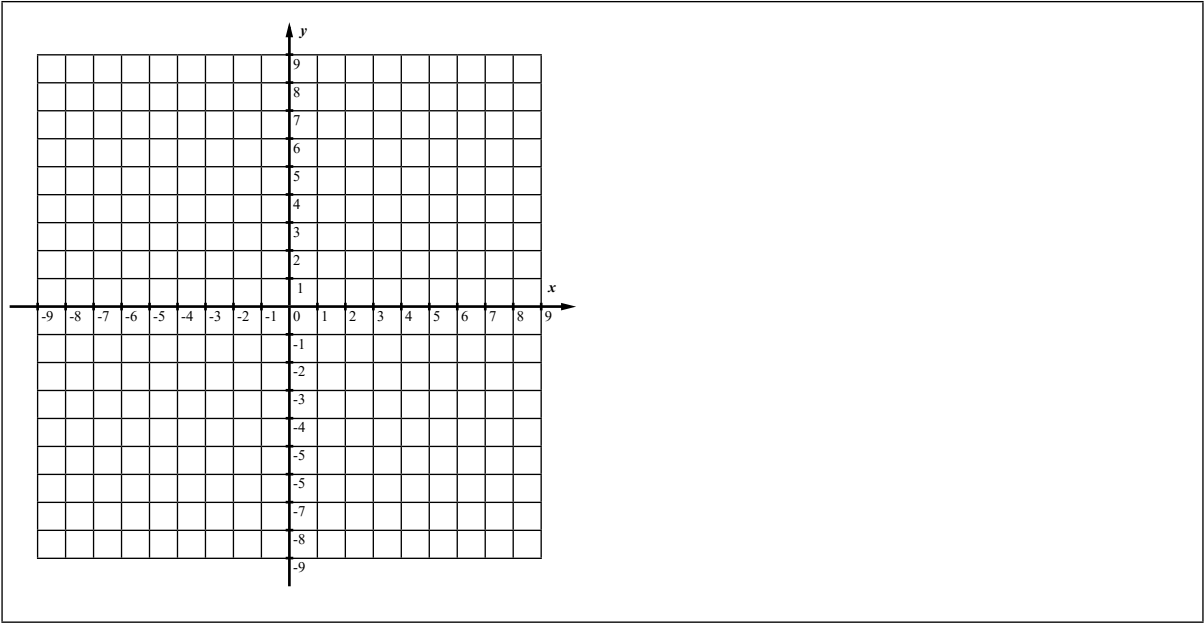
ВАРИАНТ 6

1. Вычислите: $\left(\frac{3\sqrt{18}}{\sqrt{27}} + 5\sqrt{6} - 2\right) : (\sqrt{54} - 1)$.

2. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если одно из них удвоить, то эти числа, взятые в том же порядке, образуют арифметическую прогрессию. Найдите эти числа, если первое из них равно 1.

3. Решите неравенство: $\sqrt{5 - |x - 1|} \geq \sqrt{x}$.

4. Изобразите график неравенства: $(x + y - 2)\sqrt{x^2 + y^2 - 4} \geq 0$.



5. Михаил, Алексей, Николай и Елисей учредили компанию с уставным капиталом 1 млн рублей. Михаил внёс 25% уставного капитала, Алексей – 550 тыс. руб., Николай – 3,25 всего уставного капитала, а оставшуюся сумму внёс Елисей. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесенному в уставной капитал вкладу. Какая сумма от прибыли размером 7 млн рублей причитается Елисею?

6. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{x^2 - (2a + 2)x + 6a - 3}{\sqrt{2 + x - x^2}} = 0$ имеет единственное решение?

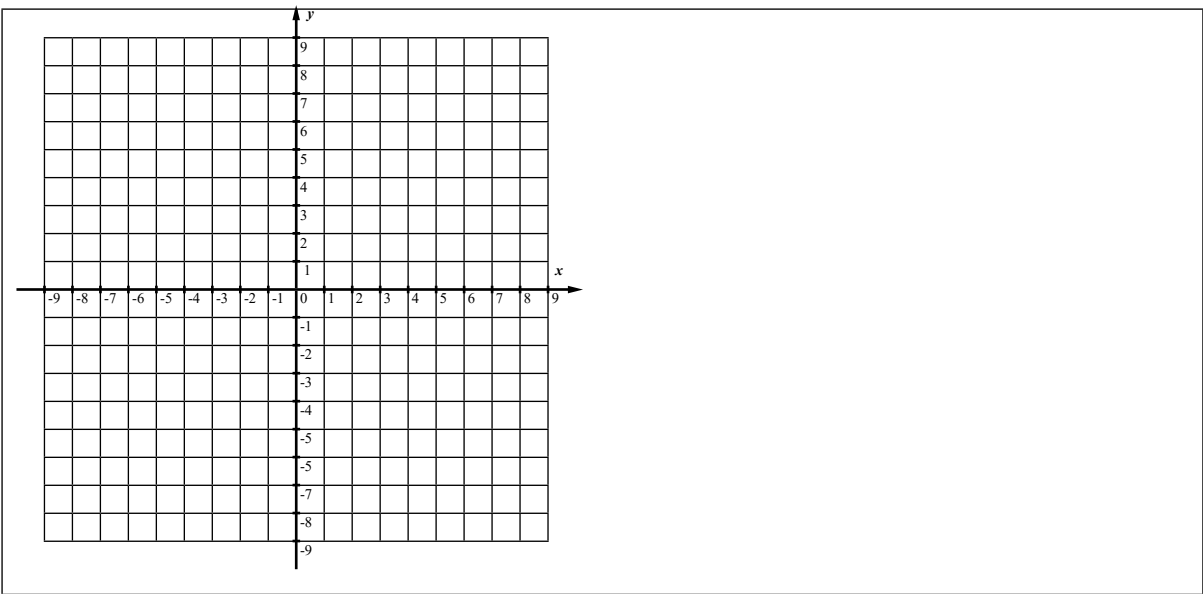
ВАРИАНТ 7

1. Вычислите: $\left(\frac{1}{\sqrt{4-\sqrt{7}}} + \frac{1}{\sqrt{4+\sqrt{7}}} \right) \cdot \sqrt{14}.$

2. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} |x| + y^2 = 13, \\ x + |y| = -1. \end{cases}$$

3. Решите неравенство: $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x - 3)(x - 2) \leq 1.$

4. Изобразите график неравенства: $y \leq |x^2 - 4|x||$.



5. Если к сплаву меди и олова добавить 25 кг меди, то содержание меди в сплаве станет равным 60%. Если же к первоначальному сплаву добавить 8 кг сплава, содержащего 30% меди, то содержание меди станет равным 40%. Найдите массу первоначального сплава.

6. При каких значениях параметра a уравнение $ax - 1 = \sqrt{8x - x^2 - 15}$ имеет единственное решение?

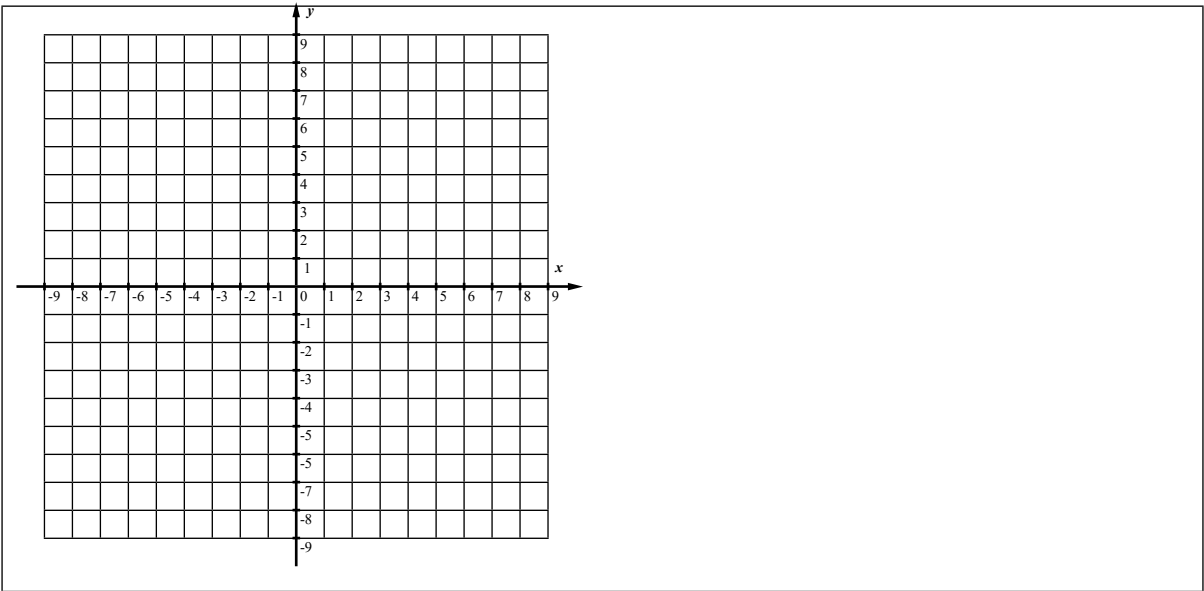
ВАРИАНТ 8

1. Вычислите: $\frac{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}.$

2. Между числом 3 и неизвестным числом вставлено ещё одно так, что все три числа образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Если уменьшить средний член прогрессии на 6, то, в свою очередь, получится геометрическая прогрессия. Найдите неизвестное число.

3. Решите неравенство: $\sqrt{2x+|x+3|} \leq \sqrt{5}.$

4. Изобразите график неравенства: $x^2 - |2x| + y^2 - 2|y| + 1 > 0$.



5. Имеется 25%-й раствор кислоты. Часть раствора вылили и добавили такое же количество воды, получив при этом 12%-й раствор этой же кислоты. Какую часть первоначального раствора заменили водой?

6. Определите количество корней уравнения $|x - a| + |x| = 2$ в зависимости от значений параметра a .

ОТВЕТЫ

ЗАДАНИЕ 3

1) б в г д е;	2) в г.
---------------	---------

ЗАДАНИЕ 4

1) возрастающая; 2) убывающая;	3) убывающая; 4) возрастающая.
-----------------------------------	-----------------------------------

ЗАДАНИЕ 5

1) 40; 2) 12; 3) 4;	4) 1; 5) 0; 6) 2.
---------------------------	-------------------------

ЗАДАНИЕ 6

1) не является чётной и не является нечётной; 2) не является чётной и не является нечётной; 3) чётная; 4) не является чётной и не является нечётной; 5) не является чётной и не является нечётной;	6) чётная; 7) чётная; 8) чётная; 9) нечётная; 10) чётная.
--	---

ЗАДАНИЕ 7

1) 4; 2) 8;	3) 4; 4) 20.
----------------	-----------------

ЗАДАНИЕ 8

1) -11 ; 2) 0;	3) 12; 4) 22.
---------------------	------------------

ЗАДАНИЕ 10

1) ± 1 ;	2) ± 2 .
--------------	--------------

ЗАДАНИЕ 12

0.

ЗАДАНИЕ 13

0.

ЗАДАНИЕ 14

1) нет действительных корней;	2) -1 .
-------------------------------	-----------

ЗАДАНИЕ 20

1) 1; 2) 1; 3) -2; 4) -1, 2, 3;	5) -5, -3, -1; 6) $-4, \pm\sqrt{2}$; 7) -2; 8) 1.
--	---

ЗАДАНИЕ 21

1) -1; 2) 3; 3) $-2, 1 \pm \sqrt{10}$; 4) -5, 3, 6; 5) -1, 2, 5;	6) 1, 3; 7) $1, -2 \pm \sqrt{2}$; 8) -1, 3, 4; 9) $-2, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}$; 10) -1, 2.
---	--

ЗАДАНИЕ 22

1) $-1 \pm \sqrt{5}, 1 \pm \sqrt{2}$; 2) $-1 \pm \sqrt{2}, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$;	3) $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; 4) $1 \pm \sqrt{3}$.
--	--

ЗАДАНИЕ 23

1) $1, \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$; 2) $\frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$;	3) $4 \pm \sqrt{15}$; 4) $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.
---	---

ЗАДАНИЕ 26

1) $[-3; -2) \cup [3; +\infty)$; 2) $(-\infty; -4) \cup \left(-\frac{2}{3}; 1\right)$; 3) $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup \left(\frac{1}{2}; 2\right)$; 4) $(-2; 1) \cup (3; +\infty)$; 5) $(2; +\infty)$; 6) $[3; +\infty)$; 7) $(-\infty; -1) \cup \{2\}$; 8) $(2; +\infty)$; 9) $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$; 10) $(-4; 1) \cup \{3\}$; 11) $(-\infty; 1) \cup \{4\} \cup (5; +\infty)$;	12) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \cup \{-1; 1\}$; 13) $[1; 3] \cup \{4\}$; 14) $(-\infty; -3) \cup [-2; -1) \cup [0; 2) \cup (2; +\infty)$; 15) $(-\infty; 2 - 2\sqrt{2}] \cup [2 + 2\sqrt{2}; +\infty) \cup \{2\}$; 16) $(-\infty; 1] \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$; 17) $[-6; 0)$; 18) $(-\infty; -2) \cup [-1; +\infty)$; 19) $(-\infty; -2] \cup (-1; 1]$; 20) $(-\infty; -2] \cup \left[0; \frac{1}{4}\right]$; 21) $(-\infty; 1) \cup \{2\}$; 22) $(-\infty; -1) \cup (2; 5)$.
---	--

ЗАДАНИЕ 31

1) $\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{4}; +\infty\right)$; 2) $[-2; 0]$; 3) $\left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$; 5) $(-\infty; -2 - 2\sqrt{2}] \cup [-2 + 2\sqrt{2}; 1) \cup (1; +\infty)$;	6) $\left(-\infty; \frac{3-\sqrt{33}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{17}}{2}; +\infty\right)$; 7) $[-1-\sqrt{7}; -\sqrt{6}] \cup [-1+\sqrt{7}; 2) \cup (2; \sqrt{6}] \cup \{3\}$; 8) $\left[\frac{5-\sqrt{13}}{2}; 1\right) \cup \left[1; \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right] \cup \{-2\}$.
--	--

ЗАДАНИЕ 35

2) $(-1-\sqrt{6}; 1-\sqrt{6}); (1+\sqrt{6}; -1+\sqrt{6}); (1-\sqrt{6}; -1-\sqrt{6}); (-1+\sqrt{6}; 1+\sqrt{6});$

4) $(2; 1); \left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right); \left(\frac{1+\sqrt{41}}{10}; \frac{-9+\sqrt{41}}{10}\right); \left(\frac{1-\sqrt{41}}{10}; \frac{-9-\sqrt{41}}{10}\right);$

5) $(2; 1); \left(\frac{12}{5}; \frac{4}{5}\right); \left(-\frac{4}{5}; \frac{12}{5}\right); \left(-\frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right);$

8) $(4; 4);$

10) $\left(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}\right);$

16) $(-1; -2); (2; 1);$

19) $(-2; 1).$

ЗАДАНИЕ 36

1) 1296; 3969;

2) 13,6;

3) первый.

ЗАДАНИЕ 44

6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42.

ЗАДАНИЕ 45

51.

ЗАДАНИЕ 46

-3; 2.

ЗАДАНИЕ 47

104.

ЗАДАНИЕ 48

2500.

ЗАДАНИЕ 49

4.

ЗАДАНИЕ 50

−1; 2.

ЗАДАНИЕ 54

17.

ЗАДАНИЕ 56

1) $-\frac{19}{4}$;

2) 5;

3) 4;

4) −11;

5) $\frac{1}{30}$.

ЗАДАНИЕ 57

1) 3; 2) 0,4; 3) 2;	4) 2; 5) 2; 6) 4.
---------------------------	-------------------------

ЗАДАНИЕ 58

1) 2,8; 2) 6; 3) 3;	4) 0,5; 5) 4; 6) 4.
---------------------------	---------------------------

ЗАДАНИЕ 59

1) $2ab$; 2) $3ab$; 3) a ;	4) $\frac{2}{b}$.
--------------------------------------	--------------------

ЗАДАНИЕ 60

1) $-3,5$; 2) 0; 3) 3; 4) 1; 5) -1 ;	6) 1; 7) 3; 8) $\frac{1}{\sqrt{3}}$.
---	---

ЗАДАНИЕ 61

1) $-\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{8}$; 2) $\pm\sqrt[8]{6}$;	3) 257; 4) 0; 14; 5) 8.
---	-------------------------------

ЗАДАНИЕ 62

1) 24; 2) 121; 3) -1; 4) 150; 5) $-\frac{3}{4}$; 6) 15; 7) $\frac{82}{9}$; 8) 1000;	9) $\frac{9}{8}$; 10) 1; 11) 8; 12) $\frac{113}{12}$; 13) $\frac{95}{16}$; 14) $\frac{289}{27}$.
--	---

ЗАДАНИЕ 64

1) $-\frac{28}{25}$; 3) $-\frac{26}{7}$;	5) $-1; \pm\sqrt{6}$; 6) $-\frac{83}{26}$.
---	---

ЗАДАНИЕ 65

1) $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$; 2) -3; 2; 3) $\frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$; 4) $2 + \sqrt{10}$; 5) $\frac{1 - \sqrt{29}}{2}$;	6) $\frac{-\sqrt{-3 + \sqrt{17}}}{2}$; 7) $-\frac{4}{3}; -\frac{2}{3}$; 8) -2; 5; 9) [2; 7]; 10) -2; 0; 2.
---	--

ЗАДАНИЕ 66

1) $(-\infty; -\frac{1}{3})$; 2) $(-\infty; -\frac{2}{9})$;	3) $(-\infty; -3] \cup [-1; -\frac{1}{9})$; 4) нет решений.
--	---

ЗАДАНИЕ 67

1) $(-\infty; -5] \cup \{3\}$; 3) $[3; +\infty)$;	4) $(-1; 4]$.
--	----------------

ВАРИАНТЫ РЕШЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАНИЙ

ЗАДАНИЕ 15(1)

Найдите область значений функции: $y = \frac{x^2 + 1}{8x}$.

Решение.

Пусть t – произвольное значение функции $y = \frac{x^2 + 1}{8x}$. Найдём множество значений t , при которых

уравнение $t = \frac{x^2 + 1}{8x}$ относительно x имеет корни.

Имеем

$$\begin{aligned}x^2 + 1 &= 8tx \\ x^2 - 8tx + 1 &= 0\end{aligned}$$

Найдём дискриминант полученного квадратного уравнения и потребуем, чтобы он был неотрицательным:

$$\begin{aligned}(8t)^2 - 4 &\geq 0 \\ t^2 &\geq \frac{1}{16} \\ |t| &\geq \frac{1}{4} \\ t \leq -\frac{1}{4} \text{ или } t &\geq \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Ответ: $(-\infty; -0,25] \cup [0,25; +\infty)$.

ЗАДАНИЕ 20(9)

Решите уравнение $x^3 - 5x^2 + 16x - 12 = 0$.

Решение.

Если данное уравнение имеет целый корень, то он является делителем числа -12 , то есть $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12$. Проверка убеждает нас, что число 1 – корень уравнения ($1^3 - 5 \cdot 1^2 + 16 \cdot 1 - 12 = 0$). Значит, многочлен $x^3 - 5x^2 + 16x - 12$ делится на $x - 1$. Деление многочлена выполняется „углом“:

$$\begin{array}{r|l}x^3 - 5x^2 + 16x - 12 & x - 1 \\ \hline x^3 - x^2 & \\ \hline -4x^2 + 16x - 12 & \\ -4x^2 + 4x & \\ \hline 12x - 12 & \\ -12x + 12 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Итак, $x^3 - 5x^2 + 16x - 12 = (x - 1)(x^2 - 4x + 12)$.

Найдём корни уравнения $x^2 - 4x + 12 = 0$.

$D = 16 - 48 < 0$, значит, корней нет.

Ответ: 1.

ЗАДАНИЕ 21(9)

Решите уравнение $6x^3 - x^2 - 20x + 12 = 0$.

Решение.

Если данное уравнение имеет целый корень, то он является делителем числа 12, то есть $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12$.

Схема Горнера:

	6	−1	−20	12	
1	6	5	−15	$-3 \neq 0$	Не является корнем
−1	6	−7	−13	$25 \neq 0$	Не является корнем
2	6	11	2	$16 \neq 0$	Не является корнем
−2	6	−13	6	0	Корень уравнения

$$6x^3 - x^2 - 20x + 12 = (x + 2)(6x^2 - 13x + 6)$$

Найдём корни уравнения $6x^2 - 13x + 6 = 0$

$$D = 169 - 4 \cdot 6 \cdot 6 = 25$$

$$x_1 = \frac{13 + 5}{12} = 1,5 \quad x_2 = \frac{13 - 5}{12} = \frac{2}{3}$$

Ответ: $-2; \frac{2}{3}; 1,5$.

ЗАДАНИЕ 22(2)

Решите уравнение $x^4 - x^3 - 6x^2 + 5x - 1 = 0$.

Решение.

Подставляя в уравнение делители свободного члена, убеждаемся в том, что оно не имеет рациональных корней. Представим уравнение в виде

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = 0.$$

Раскрыв скобки и записав левую часть уравнения в виде многочлена стандартного вида, получим

$$x^4 + (a + c)x^3 + (ac + b + d)x^2 + (ad + bc)x + bd = 0,$$

$$\begin{cases} a + c = -1, \\ ac + b + d = -6, \\ ad + bc = 5, \\ bd = -1. \end{cases}$$

Последнее уравнение системы имеет два целочисленных решения:

$$\begin{cases} b = 1, \\ d = -1, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} b = -1, \\ d = 1. \end{cases}$$

Проверкой убеждаемся, что при $\begin{cases} b=1, \\ d=-1, \end{cases}$ система будет иметь решение $a = -3$ и $c = 2$.

Следовательно, исходное уравнение приводится к виду
 $(x^2 + 2x - 1)(x^2 - 3x + 1) = 0$.

Из равенств $x^2 + 2x - 1 = 0$ и $x^2 - 3x + 1 = 0$ найдём корни уравнения $-1 \pm \sqrt{2}; \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $-1 \pm \sqrt{2}; \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

ЗАДАНИЕ 27(3)

Найдите все такие значения переменной, при которых выполняется ровно два неравенства из трёх: $\frac{a-3}{a} + \frac{1}{a-3} < \frac{2}{3a-a^2}$, $\frac{2}{3}a - 6 > 4 - a$, $\frac{a^2+15}{a-1} \leq 10$.

Решение.

Решим первое неравенство.

$$\frac{a-3}{a} + \frac{1}{a-3} < \frac{2}{3a-a^2}$$

$$\frac{a-3}{a} + \frac{1}{a-3} - \frac{2}{a(3-a)} < 0$$

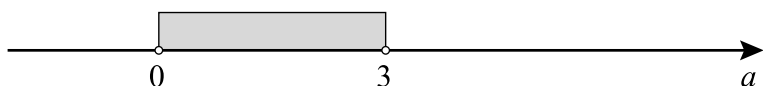
$$\frac{(a-3)^2 + a + 2}{a^2 - 3a} < 0$$

$$\frac{a^2 - 5a + 11}{a^2 - 3a} < 0$$

$a^2 - 5a + 11 > 0$ для любого a , так как $D = 25 - 44 < 0$.

Значит, $a^2 - 3a < 0$,

$$a(a-3) < 0.$$

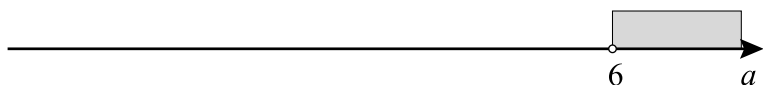


Решим второе неравенство.

$$\frac{2}{3}a - 6 > 4 - a$$

$$\frac{5}{3}a > 10$$

$$a > 6$$



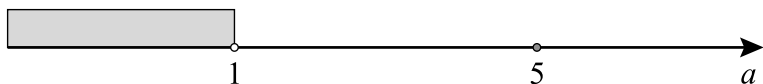
Решим третье неравенство.

$$\frac{a^2+15}{a-1} \leq 10$$

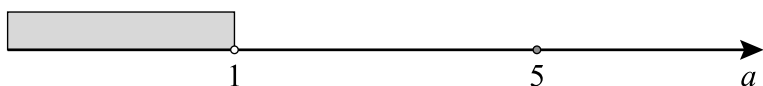
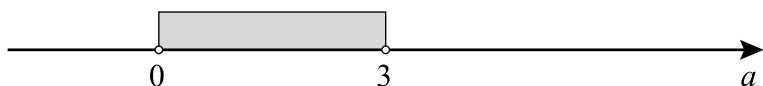
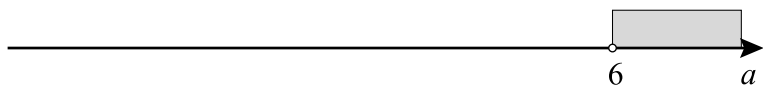
$$\frac{a^2+15-10(a-1)}{a-1} \leq 0$$

$$\frac{a^2-10a+25}{a-1} \leq 0$$

$$\frac{(a-5)^2}{a-1} \leq 0$$



Найдём значение переменной, при которых выполняется ровно два неравенства.



Ответ: (0;1).

ЗАДАНИЕ 35(13)

Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+3xy=4, \\ 2x^2-y^2=1. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} x^2+3xy=4, \\ 2x^2-y^2=1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+3xy=4, \\ 8x^2-4y^2=4; \end{cases}$$

$$x^2+3xy=8x^2-4y^2$$

$$7x^2-3xy-4y^2=0$$

$$7x^2-7xy+4xy-4y^2=0$$

$$(7x+4y)(x-y)=0$$

$$\begin{cases} x-y=0, \\ 2x^2-y^2=1; \end{cases}$$

$$x^2=1$$

$$x=\pm 1$$

$$\begin{cases} x=1, \\ y=1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-1, \\ y=-1; \end{cases}$$

Ответ: $(1;1), (-1;-1)$.

$$\begin{cases} 7x+4y=0, \\ 2x^2-y^2=1; \end{cases}$$

$$2x^2-\frac{49x^2}{16}=1$$

$$-17x^2=16$$

корней нет

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
СВОЙСТВА ФУНКЦИИ. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ	4
УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	22
НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	26
УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ	33
НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ ...	44
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ	51
СТЕПЕНИ И КОРНИ	55
ВАРИАНТЫ ДЛЯ ИТОГОВОГО ПОВТОРЕНИЯ	66
Вариант 1	66
Вариант 2	68
Вариант 3	70
Вариант 4	72
Вариант 5	74
Вариант 6	76
Вариант 7	78
Вариант 8	80
ОТВЕТЫ	82
ВАРИАНТЫ РЕШЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ ЗАДАНИЙ	91

Минимальные системные требования определяются соответствующими требованиями программ Adobe Reader версии не ниже 11-й либо Adobe Digital Editions версии не ниже 4.5 для платформ Windows, Mac OS, Android и iOS; экран 10"

Учебное электронное издание

Куделина Д. А., Куделина Е. А.

АЛГЕБРА

9 класс

Углублённый уровень

Тетрадь-тренажёр

Учебное пособие

Генеральный директор

М. Б. Миндюк

Редактор Д. П. Локтионов

Художественный редактор Е. Ю. Воробьёва

Компьютерная вёрстка и макет И. А. Потрахов

Подписано к использованию 03.10.25

Формат 18,0×27,5 см

Гарнитура Times New Roman

Издательство «Интеллект-Центр»

125445, Москва, ул. Смольная, 24А, этаж 6, ком. 24

Тел.: (495) 660-34-53

Сайт: <https://www.intellectcentre.ru/>

Эл. почта: intellect@izentr.ru

Электронное издание данной книги подготовлено

Агентством электронных изданий «Интермедиатор»

Сайт: <https://www.intermediator.ru>

Телефон: (495) 587-74-81

Эл. почта: info@intermediator.ru

Издательство «Интеллект-Центр»

- Учебные материалы для подготовки к ЕГЭ, ОГЭ и Всероссийским Проверочным Работам
- Практикумы и дидактические материалы
- Сборники тестовых заданий
- Материалы для развития интеллектуальных способностей
- Учебные пособия, реализующие современные технологии в обучении и контроле знаний учащихся

- **Покупайте наши пособия в электронном формате в интернет-магазине «Электронный универс»**
e-Univers.ru



Издательство «Интеллект-Центр»

тел./факс: + 7 (495) 660-34-53

Ждём Ваших писем: 125445, г. Москва, ул. Смольная, д. 24А,

этаж 6, ком. 24 | e-mail: intellect@izentr.ru

www.intellectcentre.ru | vk.com/intellektcentre | t.me/izentr